LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2010/2011

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Soluzioni esercizi 4,5,6 esame scritto del 13/09/2011

4 Si consideri il sistema di equazioni nelle variabili (x, y, z) e nel parametro a

$$x^2 + y^2 = 2 - z^3 a^2$$

$$2x + y^2 = za$$

$$3x^2 z + y^2 = 1$$

(3 punti) a. Dopo aver verificato che, per $a = 1$ il sistema ha per soluzione il punto $(x, y, z) = (0, 1, 1)$, dimostrare che è possibile, in un intorno di tale punto, esprimere (x, y, z) come funzioni C^1 di a (le chiameremo $(x(a), y(a), z(a))$.

(3 punti) b. Calcolare $(x'(a), y'(a), z'(a))$.

SOLUZIONE

a. Innanzitutto sostituiamo nel sistema $a = 1$ e $(x, y, z) = (0, 1, 1)$, ottenendo facilmente che il sistema è verificato per tali valori.

Poi utilizziamo il teorema delle funzioni implicite. Per vedere se è possibile applicarlo bisogna innanzitutto considerare la funzione $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ottenuta come segue: si porta tutto a primo membro in ogni equazione del sistema e il primo membro di ogni equazione diventa una componente di G. Quindi

$$G(x, y, z, a) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 + z^3 a^2 \\ 2x + y^2 - za \\ 3x^2 z + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Innanzitutto, per applicare il Teorema delle Funzioni Implicite, dobbiamo controllare se tale funzione considerata è C^1 in un intorno del punto $(0, 1, 1, 1)$. Ciò è vero sempre in quanto tale funzione è composizione di funzioni C^1 all'interno del suo dominio $\mathbb{R}^4$. Ora calcoliamo il Jacobiano di G rispetto alle variabili (x, y, z) (quelle che scegliamo come dipendenti)

$$DG_{(x,y,z)}(x, y, z, a) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 3z^2 a^2 \\ 2 & 2y & -a \\ 6xz & 2y & 3x^2 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$DG_{(x,y,z)}(0, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha determinante $12 \neq 0$ quindi è invertibile e quindi su può applicare il TFI. Grazie a tale teorema sappiamo che esistono tre funzioni $x(a), y(a), z(a)$, definite (e C^1) per a appartenente ad un intorno I di 1, tali che

$$G\left(x(a), y(a), z(a), a\right) = 0 \qquad \forall a \in I$$

e

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(1)}{\partial a} \\ \frac{\partial y(1)}{\partial a} \\ \frac{\partial z(1)}{\partial a} \end{pmatrix} = \left[D_{(x,y,z)} G\left(0, 1, 1, 1\right)\right]^{-1} \cdot D_a G\left(0, 1, 1, 1\right). \tag{1}$$

Osserviamo ora che

$$D_a G(x, y, z, a) = \begin{pmatrix} 2az^3 \\ -z \\ 0 \end{pmatrix}$$

cosicché

$$D_a G\,(0,1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dalla formula (1) ricaviamo allora

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(1)}{\partial a} \\ \frac{\partial y(1)}{\partial a} \\ \frac{\partial z(1)}{\partial a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per trovare le derivate cercate possiamo dunque:

* o usare le formule per il calcolo dell'inversa
* oppure, come suggerito anche nel testo, risolvere il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} da,$$

  esplicitando dx, dy, dz, in termini di da.

Usiamo il secondo metodo che è più veloce in questo caso. Il sistema si scrive

$$\begin{cases} 2dy + 3dz = 2da \\ 2dx + 2dy - dz = -da \\ 2dy = 0. \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ha subito $dy = 0$. Quindi la prima diventa $dz = \frac{2}{3}da$ e la seconda $2dx - \frac{2}{3}da = -da$ che implica $dx = -\frac{1}{6}da$. Il risultato finale è quindi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(1)}{\partial a} \\ \frac{\partial y(1)}{\partial a} \\ \frac{\partial z(1)}{\partial a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b.

5 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x,y) = -2x^2 - y^2 - 2xy \ln y$$

(3 punti) a. Trovare gradiente, Hessiano e punti critici.

(3 punti) b. Studiare, motivando la risposta, la natura dei punti critici (in caso ci siano punti di massimo/minimo locale, dire anche se essi sono globali).

SOLUZIONE

a. Innanzituto osserviamo che $CE(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 0\}$. Sul CE la funzione è C^2 in quanto somma e prodotto di funzioni elementari. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (-4x - 2y \ln y, -2y - 2x(\ln y + 1))$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & -2(\ln y + 1) \\ -2(\ln y + 1) & -2 - 2\frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

Per trovare i punti critici poniamo $\nabla f(x,y) = 0$ ottenendo il sistema

$$\begin{cases} -4x - 2y \ln y = 0 \\ -2y - 2x(\ln y + 1) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo $x = -\frac{1}{2} y \ln y$. Sostituendo nella seconda si ottiene:

$$-2y - 2(-\frac{1}{2} y \ln y)(\ln y + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2y + y \ln y(\ln y + 1) = 0$$

da cui, raccogliendo y, si ha

$$y(-2 + (\ln y)^2 + \ln y) = 0$$

Dato che $y > 0$ quindi ci riduciamo all'equazione

$$-2 + (\ln y)^2 + \ln y = 0.$$

Ponendo $\ln y = t$ vediamo che t deve risolvere l'equazione di secondo grado

$$t^2 + t - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (t+2)(t-1) = 0$$

che ha per soluzioni $t = -2$ e $t = 1$. Dato che $\ln y = t$ si ha $y = e^t$ e le soluzioni in y sono quindi $y = e^{-2}$ e $y = e$. Sostituendo infine nella prima equazione troviamo i due punti critici

$$(e^{-2}, e^{-2}), \quad (-\frac{e}{2}, e)$$

b. Studiamo il segno dell'Hessiano nei due punti critici. Si ha

$$D^2 f(e^{-2}, e^{-2}) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det D^2 f(e^{-2}, e^{-2}) = 8e^{-2} - 4 < 0$$

Quindi tale matrice è indefinita e quindi il punto critico (e^{-2}, e^{-2}) è un punto di sella. Nel punto critico $(-\frac{e}{2}, e)$ si ha

$$D^2 f(-\frac{e}{2}, e) = \begin{pmatrix} e & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det D^2 f(e^{-2}, e^{-2}) = -e - 16 < 0$$

Quindi anche tale matrice è indefinita e quindi anche il punto critico $(-\frac{e}{2}, e)$ è un punto di sella.
Di conseguenza non vi sono massimi o minimi globali di f sul suo CE.

6 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

e i vincoli

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

Si consideri il problema di trovare massimo e minimo di f sotto i vincoli dati.

(2 punti) a. Dire se sono sempre soddisfatte o no le condizioni di qualificazione dei vincoli (motivare la risposta).

(1 punto) b. Scrivere il sistema di Kuhn-Tucker (KT) di tale problema.

(4 punti) c. Trovare gli eventuali punti stazionari vincolati appartenenti alla regione

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x > 0, y > 0, z > 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

che è una porzione di frontiera della regione ammissibile.

(1 punto) d. Studiare infine la natura di tali punti.

SOLUZIONE

a. Le funzioni vincolari sono

$$g_1(x, y, z) = -x, \qquad g_2(x, y, z) = -y, \qquad g_3(x, y, z) = -z, \qquad g_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

I loro gradienti sono

$$\nabla g_1(x, y, z) = (-1, 0, 0), \qquad \nabla g_2(x, y, z) = (0, -1, 0), \qquad \nabla g_3(x, y, z) = (0, 0, -1), \qquad \nabla g_4(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Controlliamo se le condizioni di qualificazione dei vincoli (CQ) sono soddisfatte.

* Nel caso in cui si annulla un solo vincolo occorre che il gradiente di ciascuna funzione g_i ($i = 1, 2, 3$) sia non nullo sui punti in cui vale l'uguaglianza. Ciò è sicuramente vero per la g_1, la g_2 e la g_3 in quanto i gradienti sono costanti e non nulli. Inoltre è vero anche per la g_4 perché il suo gradiente si annulla solo nel punto $(0, 0, 0)$ ma in tale punto non si ha $g_4 = 0$.
* Nel caso in cui si annullano solo due vincoli occorre che i gradienti dei due vincoli che si annullano siano LI. Se i due vincoli sono presi tra i primi 3 essi sono sicuramente LI in quanto i gradienti di g_1, g_2, g_3 sono costanti e LI.
  Se invece uno dei due vincoli che si annulla è il quarto allora occorre controllare. Consideriamo il caso in cui si annullino solo g_1 e g_4. In tal caso i loro gradienti sono LD solo se $y = z = 0$. Dato che $g_1 = 0$ si ha che anche $x = 0$. Di conseguenza non può essere $g_4 = 0$ e quindi le CQ sono soddisfatte in questo caso. I casi in cui si annullano g_2 e g_4 (o g_3 e g_4) sono analoghi e danno la stessa conclusione: le CQ sono soddisfatte.
* Nel caso in cui si annullano esattamente tre vincoli occorre che i corrispondenti gradienti siano LI. Se i tre vincoli che si annullano sono i primi tre le CQ sono sicuramente soddisfatte in quanto il loro gradienti sono costanti e tra loro LI.
  Se invece uno dei tre vincoli che si annulla è il quarto allora occorre controllare. Consideriamo il caso in cui si annullino g_1, g_2 e g_4. In tal caso i loro gradienti sono LD solo se $z = 0$. Dato che $g_1 = 0$ e $g_2 = 0$ si ha che anche $x = y = 0$. Di conseguenza non può essere $g_4 = 0$ e quindi le CQ sono soddisfatte in questo caso. I casi in cui si annullano g_1, g_3 e g_4 (o g_2, g_3 e g_4) sono analoghi e danno la stessa conclusione: le CQ sono soddisfatte.

Da quanto detto sopra segue che le CQ sono sempre soddisfatte per il nostro problema.

b. Dato che $\nabla f(x, y) = (1, 2, 3)$, il sistema di KT è il seguente:

$$\begin{cases} 1 = -\lambda_1 + \lambda_4 2x \\ 2 = -\lambda_2 + \lambda_4 2y \\ 3 = -\lambda_3 + \lambda_4 2z \\ \\ \lambda_1(-x) = 0 \\ \lambda_2(-y) = 0 \\ \lambda_3(-z) = 0 \\ \lambda_4(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 \\ \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

con l'ulteriore vincolo sul segno dei moltiplicatori λ_i che dovranno essere non negativi per la ricerca dei punti di massimo e non positivi per la ricerca dei punti di minimo.

c. Per trovare i punti stazionari vincolati in D occorre risolvere il sistema (che è un caso particolare di quello scritto al punto (b) qui sopra):

$$\begin{cases} 1 = \lambda_4 2x \\ 2 = \lambda_4 2y \\ 3 = \lambda_4 2z \\ \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \\ x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dalle prime tre equazioni si ricava che

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda_4} \\ \\ y = \frac{1}{\lambda_4} \\ \\ z = \frac{3}{2\lambda_4} \end{cases}$$

Sostituendo nella quarta si ha

$$\left(\frac{1}{2\lambda_4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda_4}\right)^2 = 1$$

Da cui

$$\left(\frac{1}{\lambda_4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}\right) = 1$$

cioè

$$\lambda_4^2 = \frac{7}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_4 = \pm \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sostituendo nelle prime tre equazioni troviamo allora due punti critici

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad per \qquad \lambda_4 = \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}, -\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}, -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad per \qquad \lambda_4 = -\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

d. Osserviamo innanzitutto che la regione è compatta (chiusa perché contiene tutta la sua frontiera, dato che le disuguaglianze vincolari sono tutte larghe, limitata perché è contenuta in una palla di raggio 2 e centro l'origine). Quindi esistono di sicuro massimo e minimo grazie al teorema di Weierstrass. I due punti trovati sono quindi uno di massimo globale (quello relativo al moltiplicatore positivo) e uno di minimo globale (quello relativo al moltiplicatore negativo).