LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2010/2011

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Soluzioni all'esame scritto del 13/07/2011

1. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$, l'operatore $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$, ed il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(3 punti) a. Determinare i valori di a per cui non esistono soluzioni al problema $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(3 punti) b. Determinare il codominio di $\hat{L}$ al variare di a.

SOLUZIONI

a. Perché non ci sia soluzione al problema $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si dovrà avere $\mathrm{Rg}(\hat{L}) < \mathrm{Rg}(\hat{L}|\mathbf{b})$.
Calcoliamo il rango di $\hat{L}$:

$$\det(\hat{L}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix} = (a-2)(a-4)\,.$$

Per cui se $a \neq 2, 4$ allora $\mathrm{Rg}(\hat{L}) = \mathrm{Rg}(\hat{L}|\mathbf{b}) = 3$ ed il problema ammette soluzioni. Nel caso in cui $a = 2, 4$ dobbiamo andare a controllare il rango di $(\hat{L}|\mathbf{b})$.
Caso $a = 2$. Calcoliamo

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Visto che la quarta colonna è ottenibile come differenza tra la seconda e la prima, anche il rango di $(\hat{L}|\mathbf{b})$ sarà pari a due e quindi il sistema ammetterà soluzione.
Caso $a = 4$. Calcoliamo

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso esistono varie sottomatrici 3×3 che hanno determinante non nullo (per esempio quella composta dalle ultime tre colonne) e quindi il rango di $(\hat{L}|\mathbf{b})$ sarà pari a tre ed il sistema non ammetterà soluzione.

b. Per determinare il codominio sarà sufficiente determinarne una base al variare di a. Nel caso in cui $a \neq 2, 4$ visto che $\dim(\mathrm{Im}(\hat{L})) = 3$ il codominio sarà tutto $\mathbb{R}^3$ e quindi possiamo scegliere come base la base canonica e scrivere $\mathrm{Im}(\hat{L}) = \mathrm{SPAN}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}3)$.
Nel caso $a = 2$ siamo obbligati a scegliere come elementi di base le uniche due colonne indipendenti, ossia

$$\mathrm{Im}(\hat{L}) = \mathrm{SPAN}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Mentre nel caso $a = 4$ possiamo scegliere due colonne indipendenti tra le tre a disposizione: scegliamo la seconda e la terza:

$$\mathrm{Im}(\hat{L}) = \mathrm{SPAN}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

2. Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$,

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinarne la soluzione particolare passante per $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1 punti) c. Determinare il limite per $t \to \infty$ della soluzione trovata al punto precedente.

SOLUZIONI

a. Determiniamo prima di tutto la decomposizione spettrale della matrice:

$$\det(\hat{A} - \lambda\hat{\mathcal{I}}) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1)\,.$$

Quindi lo spettro di $\hat{A}$ contiene due autovalori reali e distinti $\lambda = 0, -1$. Calcoliamo anche gli autovettori:
$\lambda = 0$:

$$(\hat{L} - \lambda\hat{\mathcal{I}})\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \to$$

$$y = 0 \to \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

$\lambda = -1$:

$$(\hat{L} - \lambda\hat{\mathcal{I}})\mathbf{v}_{-1} = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \to$$

$$x + y = 0 \to \mathbf{v}_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Quindi, possiamo scrivere la soluzione generale come

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\hat{A}t)\mathbf{x}(0) = \hat{U}\exp(\hat{A}_{\mathbb{F}}t)\hat{U}^{-1}\mathbf{x}(0) = \left(\begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_0 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_{-1} \\ \\ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{v}_0 + c_2\mathbf{v}_{-1}e^{-t}\,.$$

b. In questo caso la soluzione particolare è banale perché $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}_0$ e quindi $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ da cui otteniamo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}_0$.

c. La soluzione particolare trovata al punto precedente è indipendente dal tempo è tale sarà anche il suo limite per $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_0\,.$$

3. Data l'equazione alle differenze: $x_{t+2} + 4x_t = 1 + (-1)^t$

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinare una base del nucleo dell'operatore $(D^2 + 4)$, dove D è l'operatore di incremento temporale, $Dx_t = x_{t+1}$.

SOLUZIONI

a. Iniziamo a risolvere l'equazione omogenea $x_{t+2} + 4x_t = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 4 = 0$ con soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Le soluzioni sono complesse coniugate, con $\rho = 2$ e $\theta = \pi/2$, per cui soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_t^o = 2^t(c_1 \cos(\pi t/2) + c_2 \sin(\pi t/2))\,.$$

Per la soluzione particolare, consideriamo che il termine di non omogeneità 1 è associato al nucleo dell'operatore $(D - 1)$ con autovalore $\lambda = 1$ e $\mathrm{ma}(\lambda = 1) = 1$, mentre il termine di non omogeneità $(-1)^t$ è associato al nucleo dell'operatore $(D + 1)$ con autovalore $\lambda = -1$ e $\mathrm{ma}(\lambda = 1) = 1$, senza alcun tipo di degenerazione. Quindi andremo a cercare una soluzione particolare nella forma

$$x_t^p = k_1 + k_2(-1)^t \quad \rightarrow \quad k_1 + k_2(-1)^{t+2} + 4(k_1 + k_2(-1)^t) = 1 + (-1)^t \rightarrow 5k_1 + 5k_2(-1)^t = 1 + (-1)^t\,.$$

Per verificare l'ultima uguaglianza dovrà essere $k_1 = k_2 = 1/5$. Per cui, soluzione generale sarà

$$x_t = x_t^o + x_t^p = 2^t(c_1 \cos(\pi t/2) + c_2 \sin(\pi t/2)) + 1/5 + (-1)^t/5\,.$$

b. L'operatore (D^2+4) è proprio l'operatore che genera l'equazione alle differenze del punto precedente, ossia $(D^2+4)x_t = x_{t+2}+4x_t$, e la ricerca del nucleo dell'operatore equivale alla ricerca delle soluzioni dell'equazione omogenea $(D^2+4)x_t = 0 \ \rightarrow \ x_{t+2}+4x_t = 0$ che abbiamo risolto al punto precedente. Per cui

$$\mathrm{Ker}(D^2 + 4) = \mathrm{SPAN}(2^t \cos(\pi t/2), 2^t \sin(\pi t/2))\,.$$

4. Sia data la funzione $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ con legge

$$F(x,y) = 2x^\alpha y + 2xy^\beta - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2$$

dipendente dai due parametri $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in (0,1)$.

(3 punti) a. Calcolare il gradiente di F rispetto a (x,y) e verificare che, per $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, il punto $(x,y) = (1,1)$ è un punto critico di massimo locale per F.

(4 punti) a. Trovare, spiegando perché ciò è possibile, come varia tale punto critico al variare dei parametri α e β "vicini" al valore $\frac{1}{2}$, calcolando

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} \quad .$$

SOLUZIONE

a. Si ha

$$\nabla_{(x,y))}F(x,y) = \left(2\alpha x^{\alpha-1}y + 2y^\beta - 3x, 2x^\alpha + 2\beta y^{\beta-1}x - 3y\right).$$

Si verifica subito, sostituendo, che, per $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, il punto $(x,y) = (1,1)$ annulla il gradiente di F. Inoltre si ha

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} 2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y - 3) & 2\alpha x^{\alpha-1} + 2\beta y^{\beta-1} \\ 2\alpha x^{\alpha-1} + 2\beta y^{\beta-1} & 2\beta(\beta-1)y^{\beta-2}x - 3) \end{pmatrix}$$

da cui, per $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$,

$$D^2F(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Il determinante vale $\frac{33}{4} > 0$. La traccia vale $-7 < 0$. Quindi tale matrice è definita negativa e quindi il punto critico è di massimo locale per F.

b. Per rispondere occorre utilizzare il teorema delle funzioni implicite. Per vedere se è possibile applicarlo bisogna innanzitutto considerare la funzione $G = \nabla_{(x,y))}F$ come funzione delle 4 variabili x, y, α, β e controllare se tale funzione considerata è C^1 in un intorno del punto $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ciò è vero sempre in quanto tale funzione è composizione di funzioni C^1 all'interno del suo dominio $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times (0,1) \times (0,1)$. Inoltre occorre trovare la matrice Jacobiana della funzione G rispetto alle variabili che vogliamo considerare dipendenti (nel nostro caso x, y) e controllare se tale matrice nel punto $(1,1)$ è invertibile. Tale matrice Jacobiana è l'Hessiana di F rispetto a (x,y), che abbiamo già calcolato. Quindi

$$D_{(x,y)}G(x,y,\alpha,\beta) = D^2_{(x,y)}F(x,y,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y - 3 & 2\alpha x^{\alpha-1} + 2\beta y^{\beta-1} \\ \\ 2\alpha x^{\alpha-1} + 2\beta y^{\beta-1} & 2\beta(\beta-1)y^{\beta-2}x - 3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$D_{(x,y)}G\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che tale matrice è definita negativa e quindi invertibile. Ne segue che possiamo applicare il teorema delle funzioni implicite. Grazie a tale teorema sappiamo che esistono due funzioni $x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta)$, definite (e C^1) per (α,β) appartenente ad un intorno I di $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tali che

$$G\left(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta), \alpha, \beta\right) = 0 \qquad \forall (\alpha,\beta) \in I$$

e

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial \alpha} & \frac{\partial x(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial \beta} \\ \\ \frac{\partial y(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial \alpha} & \frac{\partial y(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \left[D_{(x,y)}G\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \cdot D_{(\alpha,\beta)}G\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Osserviamo ora che

$$D_{(\alpha,\beta)}G(x,y,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 2yx^{\alpha-1}(1+\alpha\ln x) & 2y^\beta \ln y \\ \\ 2x^\alpha \ln x & 2xy^{\beta-1}(1+\beta\ln y) \end{pmatrix}$$

cosicché

$$D_{(\alpha,\beta)}G\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I}_2$$

dove $\mathbf{I}_2$ è la matrice identica di ordine 2. Dalla formula (1) ricaviamo allora

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial \alpha} & \frac{\partial x(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial \beta} \\ \\ \frac{\partial y(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial \alpha} & \frac{\partial y(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot 2I_2 = 2 \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

Usando le formule per il calcolo dell'inversa si trova allora,

$$2 \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{8}{33} \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -2 \\ -2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

da cui il risultato finale.

5. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x,y) = 2xy - x^2y^2$$

(3 punti) a. Trovare gradiente, Hessiano e punti critici.

(3 punti) b. Studiare la natura dei punti critici (motivare la risposta).

SOLUZIONE

a.

$$\nabla f(x,y) = (2y - 2xy^2, 2x - 2x^2y)$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 & 2-4xy \\ 2-4xy & -2x^2 \end{pmatrix}$$

Per trovare i punti critici poniamo $\nabla f(x,y) = 0$ ottenendo il sistema

$$\begin{cases} 2y(1-xy) = 0 \\ 2x(1-xy) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni il punto $(0,0)$ e tutti i punti dell'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$.

b. Studiamo il segno dell'Hessiano su $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\det D^2 f(x,y) = 4x^2y^2 - (2-4xy)^2 = 4x^2y^2 - 4 - 16x^2y^2 + 16xy = 4\left[-3x^2y^2 + 4xy - 1\right]$$

e

$$TrD^2 f(x,y) = -2(x^2+y^2) < 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Nel punto critico $(0,0)$ si ha $\det D^2 f(0,0) = -4 < 0$ e quindi l'Hessiano è indefinito e il punto critico non è né di max né di min. Nei punti critici dove $xy = 1$ si ha $\det D^2 f(x,y) = 0$ e $TrD^2 f(x,y) < 0$. Quindi l'Hessiano è semidefinito negativo e sappiamo soltanto che tali punti non possono essere punti di minimo. Potrebbero essere di massimo o di sella. Per scoprirlo usiamo la definizione. Nei punti critici dove $xy = 1$ si ha $f(x,y) = 1$. Vediamo se è vero che negli altri punti (o almeno in quelli vicini) si ha $f(x,y) \le 1$. Se così fosse allora tali punti sarebbero di massimo (globale o locale) altrimenti no. Vediamo allora se riusciamo a risolvere la disequazione

$$f(x,y) \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2xy - x^2y^2 \le 1$$

Portando tutto a secondo membro abbiamo

$$0 \le 1 - 2xy + x^2y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le (1-xy)^2$$

e dato che al secondo membro c'è un quadrato perfetto la disequazione è sempre soddisfatta. Tali punti sono quindi tutti di massimo globale.

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2x + 3y$$

e i vincoli (per $\alpha \in (0, 1)$),

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad x^\alpha y^{1-\alpha} \leq 1,$$

Si consideri il problema di trovare massimo e minimo di f sotto i vincoli dati.

(1 punto) a. Dire se sono sempre soddisfatte o no le condizioni di qualificazione dei vincoli (motivare la risposta).

(1 punto) b. Scrivere il sistema di Kuhn-Tucker (KT) di tale problema.

(4 punti) c. Trovare gli eventuali punti stazionari vincolati quando $\alpha = \frac{1}{2}$. Studiare la natura di tali punti.

SOLUZIONE

a. Le funzioni vincolari sono

$$g_1(x, y) = -x, \qquad g_2(x, y) = -y, \qquad g_3(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha} - 1,$$

I loro gradienti sono

$$\nabla g_1(x, y) = (-1, 0), \qquad \nabla g_2(x, y) = (0, -1), \qquad \nabla g_3(x, y) = (\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}, (1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha})$$

Le condizioni di qualificazione dei vincoli (CQ) sono sicuramente sempre soddisfatte se

- il gradiente di ciascuna funzione g_i $(i = 1, 2, 3)$ è non nullo sui punti in cui vale l'uguaglianza. Ciò è sicuramente vero per la g_1 e la g_2 in quanto sono costanti e non nulli. Inoltre è vero anche per la g_3 perché il suo gradiente non si annulla mai per $x > 0, y > 0$ il che è sicuramente vero nei punti in cui $x^\alpha y^{1-\alpha} = 1$;
- Se in un punto (x_0, y_0) si annullano più vincoli, i gradienti di essi in (x_0, y_0) devono essere Linearmente Indipendenti (LI). Ciò accade solo nel punto $(0, 0)$ dove si annullano g_1 e g_2. I gradienti di g_1 e g_2 sono costanti e sempre LI quindi anche questa condizione è sempre soddisfatta.

Da quanto detto sopra segue che le CQ sono soddisfatte per il nostro problema

b. Dato che $\nabla f(x, y) = (2x + 2, 2y + 3)$, il sistema di KT è il seguente:

$$\begin{cases} 2x + 2 - \lambda_1 + \lambda_3 \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} = 0 \\ 2y + 3 - \lambda_2 + \lambda_3 (1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha} = 0 \\ \\ \lambda_1(-x) = 0 \\ \lambda_2(-y) = 0 \\ \lambda_3(x^\alpha y^{1-\alpha} - 1) = 0 \\ \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^\alpha y^{1-\alpha} \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

con l'ulteriore vincolo sul segno dei moltiplicatori λ_i che dovranno essere non negativi per la ricerca dei punti di minimo e non positivi per la ricerca dei punti di massimo.

c. Il gradiente di f si annulla nell'unico punto $(-1, -\frac{3}{2})$. Tale punto non è interno all'insieme considerato in quanto non soddisfa i vincoli $g_1 \leq 0$ e $g_2 \leq 0$. Andiamo ora a vedere i se vi sono punti stazionari sulla frontiera. Prendiamo $\alpha = \frac{1}{2}$. In tal caso il terzo vincolo equivale ad avere $xy \leq 1$ e così lo scriveremo d'ora in poi.

Primo caso: $g_1 = 0$, $g_2 < 0$,$g_3 < 0$. In tal caso il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + 2 + \lambda_1 = 0 \\ 2y + 3 = 0 \\ \\ \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \\ x = 0 \\ y > 0 \\ xy < 1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue che $y = -\frac{3}{2}$ che è impossibile. Quindi non troviamo nessun punto stazionario vincolato in questo primo caso.
Secondo caso: $g_2 = 0$, $g_1 < 0$,$g_3 < 0$. In tal caso il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y + 3 + \lambda_2 = 0 \\ \\ \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \\ x > 0 \\ y = 0 \\ xy < 1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo $x = -1$ che è impossibile. Quindi non troviamo nessun punto stazionario vincolato in questo secondo caso.
Terzo caso: $g_3 = 0$, $g_1 < 0$,$g_2 < 0$. In tal caso il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + 2 + \lambda_3 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 0 \\ 2y + 3 + \lambda_3 \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = 0 \\ \\ \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \\ x > 0 \\ y > 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Svolgendo le prime due equazioni e usando che (grazie al vincolo $xy = 1$, $x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = y$ e $x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = x$ otteniamo

$$2x + 2 + \frac{1}{2}\lambda_3 y = 0, \qquad 2y + 3 + \frac{1}{2}\lambda_3 x = 0$$

Moltiplicando la prima per x e la seconda per y si ottiene

$$2x^2 + 2x + \frac{1}{2}\lambda_3 = 0, \qquad 2y^2 + 3y + \frac{1}{2}\lambda_3 = 0$$

Sottraendo membro a membro si ottiene poi

$$2x^2 + 2x - 2y^2 - 3y = 0$$

Dato che $xy = 1$ possiamo sostituire sopra $y = \frac{1}{x}$ e moltiplicare tutto per x^2 ottenendo

$$2x^4 + 2x^3 - 3x - 2 = 0$$

Questo polinomio non si può scomporre. Ciò è dovuto ad un errore di stampa nel testo. La funzione giusta doveva essere

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2x + 2y$$

Con questa funzione il polinomio sora diventava scomponibile facilmente. Quindi chi ha svolto i conti fino a questo punto ha avuto punteggio pieno. Per curiosità si può vedere che il polinomio considerato si annulla per un solo $x_0 > 0$. A tale punto corrisponde un punto stazionario vincolato che è di sella.
Resta fuori come ultimo caso il punto di incrocio fra i primi due vincoli, cioè il punto $(0, 0)$. In tale punto la funzione è nulla. Dato che la funzione è positiva sul primo quadrante e dato che la regione considerata è inclusa nel primo quadrante ne segue che eso è punto di minimo globale.