LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2010/2011

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Soluzioni dell’esame scritto del 10/06/2011

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$ e l’operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinare i valori di a per cui esistono solo due sottospazi invarianti indipendenti rispetto ad $\hat{L}$.

(3 punti) b. Fissato un valore di a tra quelli precedentemente determinati, calcolate $e^{\hat{L}}$.

SOLUZIONE

a. Ricordiamo che:
   (a) per sottospazio invariante di un automorfismo $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, si intende un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$, chiamiamolo $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$, tale che $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{U} \to \hat{L}\mathbf{v} \in \mathbb{U}$;
   (b) gli autovettori $\mathbf{v}$ con $\hat{L}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ designano sottospazi invarianti unidimensionali;
   (c) ogni λ è associato a sottospazi invarianti distinti ed indipendenti;
   (d) visto che $\mathbb{V}$ ha dimensione tre lo spettro di $\hat{L}$ può contenere al massimo tre autovalori.

   Per questi motivi, e visto che lo spettro di $\hat{L}$ conterrà almeno un autovalore reale (il polinomio caratteristico è del terzo grado e avrà necessariamente una radice reale) il numero di sottospazi invarianti dipenderà dagli altri due autovalori. Se essi sono reali e distinti l’operatore $\hat{L}$ avrà tre sottospazi invarianti, mentre sia nel caso di reali e coincidenti che di complessi coniugati l’operatore $\hat{L}$ avrà due sottospazi invarianti.

   Per cui determiniamo lo spettro di $\hat{L}$:

$$\det(\hat{L} - \lambda\hat{\mathcal{I}}) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(\lambda^2 - a^2 + 1)\,.$$

   Per cui gli autovalori saranno $\lambda = a$ (l’autovalore reale) e $\lambda = \pm\sqrt{a^2-1}$. $\hat{L}$ ammetterà due sottospazi invarianti se e solo se $a^2 - 1 \leq 0$ ossia $-1 \leq a \leq 1$, dove il segno di uguale è associato al caso dei reali e coincidenti.

b. Gli a più semplici da scegliere compatibilmente con i risultati ottenuti al punto precedente sono $a = 0$ e $a = 1$. Scegliamo $a = 0$. L’operatore $\hat{L}$ diventa:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   con autovalori $\lambda = 0, \pm i$.

L'unico autovettore associato all'autovalore $\lambda = 0$ è:

$$(\hat{L} - \lambda\hat{\mathcal{I}})\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{\text{-1}} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \to$$

$$\begin{cases} -y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \to \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Otteniamo ora gli autovettori complessi associati a $\lambda = \pm i$:

$$(\hat{L} - \lambda\hat{\mathcal{I}})\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & \boxed{\text{-i}} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{\text{-i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \to$$

$$\begin{cases} x - iy + z = 0 \\ -iz = 0 \end{cases} \to \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dal quale otteniamo la parte reale e la parte immaginaria dell'autovettore:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_a + i\mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Completata la decomposizione spettrale, possiamo scrivere la matrice $e^{\hat{L}}$ sfruttando la base composta dall'autovettore reale e della parte reale e parte immaginaria degli autovettori complessi coniugati $\mathbb{F} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b)$, ottenento come matrice del cambiamento di base

$$\hat{U} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e come esponenziale di $\hat{L}$:

$$e^{\hat{L}} = \hat{U} \exp(\hat{L}_{\mathbb{F}} t) \hat{U}^{-1} = \hat{U} \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 & 0 \\ -\sin 1 & \cos 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{U}^{-1}$$

2. Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$,

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinarne la soluzione particolare passante per $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1 punti) c. Determinare il limite per $t \to \infty$ della soluzione trovata al punto precedente.

SOLUZIONE

a. Determiniamo prima di tutto la decomposizione spettrale della matrice:

$$\det(\hat{A} - \lambda\hat{\mathcal{I}}) = \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 \, .$$

Quindi lo spettro di $\hat{A}$ contiene un solo autovalore doppio $\lambda = 0$. Visto che la matrice è a rango 1, siamo nel caso di Jordan, ossia autovalori reali e coincidenti. Calcoliamo quindi l'autovettore ed un autovettore generalizzato:

$$(\hat{L} - \lambda\hat{\mathcal{I}})\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1/2} & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \to$$

$$x/2 - y/2 = 0 \to \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \, .$$

Troviamo ora il primo autovettore generalizzato associato a $\lambda = 0$:

$$(\hat{L} - \lambda\hat{\mathcal{I}})\mathbf{v}_0' = \mathbf{v}_0 \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1/2} & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \to$$

$$x/2 - y/2 = 1 \to \mathbf{v}_0' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \, .$$

Quindi, possiamo scrivere la soluzione generale come

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\hat{A}t)\mathbf{x}(0) = \hat{U}\exp(\hat{A}_{\mathbb{F}}t)\hat{U}^{-1}\mathbf{x}(0) = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0' \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} ,$$

b. Per determinare la soluzione particolare passante per $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ possiamo o impostare il sistema

$$\mathbf{x}(t = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0' \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & t = 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} ,$$

e così determinare c_1 e c_2, oppure calcolare direttamente $\hat{U}^{-1}$ e usare la formula

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\hat{A}t)\mathbf{x}(0) = \hat{U}\exp(\hat{A}_{\mathbb{F}}t)\hat{U}^{-1}\mathbf{x}(0) \, .$$

In entrambi i casi si ottiene:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -t/2 \\ 1 - t/2 \end{pmatrix} \, .$$

c. Il limite per $t \to \infty$ della soluzione particolare $\mathbf{x}(t)$ è infinito:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} -t/2 \\ 1 - t/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \end{pmatrix} \, .$$

3. Data l'equazione alle differenze: $x_{t+2} - x_t = t$

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Trovare la traiettoria passante per i punti $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

(1 punti) c. Fattorizzare l'equazione alle differenze usando l'operatore di incremento temporale D.

SOLUZIONE

a. Iniziamo a risolvere l'equazione omogenea $x_{t+2} - x_t = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 1 = 0$ con soluzioni $\lambda = \pm 1$. Per cui soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_t^o = c_1(-1)^t + c_2(1)^t = c_1(-1)^t + c_2\,.$$

Per la soluzione particolare, consideriamo che il termine di non omogeneità t è associato al nucleo dell'operatore $(D-1)^2$ con autovalore $\lambda = 1$ e $\mathrm{ma}(\lambda = 1) = 2$. Visto che $\lambda = 1$ è anche radice dell'equazione caratteristica (con molteplicità algebrica pari a 1) andremo a cercare una soluzione particolare nella forma

$$x_t^p = t(k_1 + k_2 t) \qquad \to \qquad (t+2)(k_1 + k_2(t+2)) - t(k_1 + k_2 t) = t$$

$$tk_1 + t^2 k_2 + 2tk_2 + 2k_1 + 2tk_2 + 4k_2 - tk_1 - t^2 k_2 = t \qquad \to \qquad 4tk_2 + 2k_1 + 4k_2 = t\,.$$

Per verificare l'ultima uguaglianza dovrà essere $k_2 = 1/4$ e $k_1 = -1/2$. Per cui, soluzione generale sarà

$$x_t = x_t^o + x_t^p = c_1(-1)^t + c_2 + t(-1/2 + t/4)$$

b. Imponendo le condizioni iniziali $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ si ha:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 - 1/4 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 = -5/8 \\ c_2 = 5/8 \end{cases}$$

e quindi la soluzione passante per $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ sarà:

$$x_t = \frac{5}{8}(1 - (-1)^t) + \frac{1}{4}t(t-2)$$

c. Chiamando D l'operatore di incremento temporale tale che $Dx_t = x_{t+1}$ si ha che l'equazione alle differenze $x_{t+2} - x_t = t$ si può scrivere come $(D^2 - 1)x_t = t$ che fattorizzata porta a

$$(D-1)(D+1)x_t = t\,.$$

4. Data la funzione di produzione $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ con legge

$$F(K_1, K_2, L) = 3(K_1 + 2K_2)^\alpha L$$

dove $\alpha > 0$

(4 punti) a. Consideriamo l'isoquanto

$$\{(K_1, K_2, L) \in \mathbb{R}^3_+, \quad F(K_1, K_2, L) = 24\}$$

e il punto $K_1 = 1$, $K_2 = 3/2$, $L = 4$, $\alpha = 1/2$ su tale isoquanto. Dire, motivando la risposta se è possibile applicare il teorema delle funzioni implicite e calcolare, in tale punto.

$$\frac{\partial K_1}{\partial L}, \quad \frac{\partial K_2}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial K_1}.$$

SOLUZIONE

a. Per vedere se è possibile applicare il teorema delle funzioni implicite occorre innanzitutto controllare se la funzione considerata è C^1 sul suo dominio (in questo caso $\mathbb{R}^3_+$). Ciò è vero sempre tranne che nei punti $(0, 0, L)$ quando $\alpha \in (0, 1)$. In ogni caso tali punti non stanno sull'isoquanto considerato e quindi questo non ci crea problemi (ricordiamo che ci basta che la funzione sia C^1 in un insieme aperto contenente l'isoquanto considerato).

Inoltre occorre trovare il gradiente della funzione F e controllare se la derivata parziale rispetto alla variabile che si vuole considerare dipendente (nei nostri casi K_1, K_2, α) si annulla oppure no nel punto considerato. Si ha

$$\frac{\partial F}{\partial K_1} = 3\alpha(K_1 + 2K_2)^{\alpha-1}L, \qquad \frac{\partial F}{\partial K_2} = 6\alpha(K_1 + 2K_2)^{\alpha-1}L,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 3L(K_1 + 2K_2)^\alpha \ln(K_1 + 2K_2), \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = 3(K_1 + 2K_2)^\alpha.$$

Quindi nel punto considerato abbiamo, sostituendo

$$\frac{\partial F}{\partial K_1} = 3, \qquad \frac{\partial F}{\partial K_2} = 6,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 24 \ln 4, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = 6.$$

Ne segue che il teorema delle funzioni implicite si può applicare in tale punto e

$$\frac{\partial K_1}{\partial L} = -2 \qquad \frac{\partial K_2}{\partial \alpha} = -4 \ln 4, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial K_1} = \frac{1}{8 \ln 4}.$$

5. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x_1, x_2) = x_1(x_1^3 + x_2^3)$$

(2 punti) a. Trovare gradiente, Hessiano e punti critici.

(2 punti) b. Dire su quali insiemi f è concava o convessa (motivare la risposta).

(2 punti) c. Studiare la natura dei punti critici (motivare la risposta).

SOLUZIONE

a.

$$\nabla f(x_1, x_2) = (4x_1^3 + x_2^3, 3x_1x_2^2)$$
$$D^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 3x_2^2 \\ 3x_2^2 & 6x_1x_2 \end{pmatrix}$$

Per trovare i punti critici poniamo $\nabla f(x_1, x_2) = 0$ ottenendo il sistema

$$\begin{cases} 4x_1^3 + x_2^3 = 0 \\ 3x_1x_2^2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il punto $(0, 0)$ che è quindi l'unico punto critico.

b. Studiamo il segno dell'Hessiano su $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\det D^2 f(x_1, x_2) = 72x_1^3x_2 - 9x_2^4 = 9x_2(8x_1^3 - x_2^3) = 9x_2(2x_1 - x_2)(4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$$

Dato che l'ultimo fattore è sempre positivo (dimostratelo per esercizio!) quando $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, abbiamo

- $\det D^2 f(x_1, x_2) > 0$ sull'insieme

$$\{x_2 > 0,\ 2x_1 > x_2\} \cup \{x_2 < 0,\ 2x_1 < x_2\}$$

- $\det D^2 f(x_1, x_2) < 0$ sull'insieme

$$\{x_2 > 0,\ 2x_1 < x_2\} \cup \{x_2 < 0,\ 2x_1 > x_2\}$$

- $\det D^2 f(x_1, x_2) = 0$ sull'insieme

$$\{x_2 = 0\} \cup \{2x_1 = x_2\}$$

Ne segue che

- L'Hessiano è definito positivo sull'insieme

$$A := \{x_2 > 0,\ 2x_1 > x_2\} \cup \{x_2 < 0,\ 2x_1 < x_2\}$$

  Infatti su tale insieme il determinante è > 0 e l'elemento in alto a sinistra (M_1) è $12x_1^2$ che è sempre positivo su tale insieme (infatti quando tale elemento vale 0 si ha necessariamente $detD^2 f(x_1, x_2) = -9x_2^4 \leq 0$

- L'Hessiano è indefinito sull'insieme

$$B := \{x_2 > 0,\ 2x_1 < x_2\} \cup \{x_2 < 0,\ 2x_1 > x_2\}$$

  Infati in tale insieme il determinante è < 0.

Per studiare il segno dell'Hessiano quando il determinante è nullo (cioè sull'insieme $\{x_2 = 0\} \cup \{2x_1 = x_2\}$) calcoliamo la traccia:

$$TrD^2 f(x_1, x_2) = 12x_1^2 + 6x_1x_2 = 6x_1(2x_1 + x_2)$$

Ne segue che:

- sull'insieme $C := \{x_2 = 0\} - \{(0, 0)\}$ (asse delle ascisse privato dell'origine) l'Hessiano è semidefinito positivo (e non nullo) in quanto la traccia vale $12x_1^2 > 0$;
- sull'insieme $D := \{2x_1 = x_2\} - \{(0, 0)\}$ l'Hessiano è semidefinito positivo (e non nullo) in quanto la traccia vale $24x_1^2 > 0$;
- infine nel punto $(0, 0)$ lHessiano è nullo.

Dato che la funzione è continua possiamo dedurre che è convessa sull'insieme

$$\overline{A} = \{x_2 \geq 0,\ 2x_1 \geq x_2\} \cup \{x_2 \leq 0,\ 2x_1 \leq x_2\}$$

c. L'Hessiano è nullo nel punto critico $(0,0)$. Quindi non abbiamo alcuna informazione dalle condizioni del secondo ordine.

Proviamo con le restrizioni. Se ci restringiamo alla retta di equazione

$$x_1 = t, \quad x_2 = 0$$

la restrizione vale $\varphi(t) = t^4$. Lungo tale restrizione $t = 0$ è un punto di minimo. Ne segue che l'origine per la funzione f non può esssere punto di massimo (o è di minimo o è di sella)

Se poi ci restringiamo alla retta di equazione

$$x_1 = t, \quad x_2 = -2t$$

la restrizione vale $\varphi(t) = t(t^3 - 8t^3) = -7t^4$. Lungo tale restrizione $t = 0$ è un punto di massimo. Ne segue che l'origine per la funzione f non può esssere punto di minimo. Quindi è per forza punto di sella)

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e i vincoli

$$x + y + z^2 \le 2, \qquad z^2 - y^2 \le 2,$$

Si consideri il problema di trovare massimo e minimo di f sotto i vincoli dati.

(2 punti) a. Dire se sono sempre soddisfatte o no le condizioni di qualificazione dei vincoli (motivare la risposta).

(1 punto) b. Scrivere il sistema di Kuhn-Tucker (KT) di tale problema.

(1 punti) c. Trovare gli eventuali punti critici interni.

(4 punti) d. Trovare gli eventuali punti critici quando i due vincoli sono soddisfatti con l'uguaglianza.

SOLUZIONE

a. Le funzioni vincolari sono

$$g_1(x, y, z) = x + y + z^2 - 2, \qquad g_2(x, y, z) = z^2 - y^2 - 2$$

I loro gradienti sono

$$\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 2z), \qquad \nabla g_2(x, y, z) = (0, -2y, 2z)$$

Le condizioni di qualificazione dei vincoli (CQ) sono sicuramente sempre soddisfatte se i due gradienti sopra calcolati sono LI in ogni punto. Ciò è sempre vero se $yne0$ o $z \neq 0$. Infatti in tal caso i due gradienti sono non nulli e sono LI perché la prima componente del primo gradiente vale sempre 1 e la prima componente del secondo gradiente vale sempre 0 (e quindi non possono essere uno multiplo dell'altro). Nel caso in cui $y = z = 0$ il secondo gradiente si annulla ma il secondo vincolo non è soddisfatto con $=$ e quindi anche in questo caso le CQ valgono.

b. Dato che $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, il sistema di KT è il seguente:

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 = 0 \\ 2y + \lambda_1 - 2y\lambda_2 = 0 \\ 2z + 2z\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x + y + z^2 - 2) = 0 \\ \lambda_2(z^2 - y^2 - 2) = 0 \\ x + y + z^2 - 2 \le 0 \\ z^2 - y^2 - 2 \le 0 \end{cases} \tag{1}$$

con l'ulteriore vincolo sul segno dei moltiplicatori λ_i che dovranno essere non negativi per la ricerca dei punti di minimo e non positivi per la ricerca dei punti di massimo.

c. Il grafiente di f si annulla nell'unico punto $(0, 0, 0)$. Tale punto è interno all'insieme considerato in quanto soddisfa entrambi i vincoli col minore stretto.

d. Se imponiamo che entrambi i vincoli siano soddisfatti con $=$ il sistema di KT diventa come segue

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 = 0 \\ 2y + \lambda_1 - 2y\lambda_2 = 0 \\ 2z + 2z\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \\ x + y + z^2 - 2 = 0 \\ z^2 - y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

La terza equazione si può riscrivere

$$2z(1 + \lambda_1 + \lambda_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0 \quad \textit{oppure} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -1$$

Primo caso: $z = 0$. In tal caso il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 = 0 \\ 2y(1 - \lambda_2) + \lambda_1 = 0 \\ z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \\ -y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione segue che $-y^2 = 2$ che è impossibile.

Secondo caso: $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$. In tal caso il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 = 0 \\ 2y(1 - \lambda_2) + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ x + y + z^2 - 2 = 0 \\ z^2 - y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo $\lambda_1 = -2x$. Sostituendo nella terza otteniamo $\lambda_2 = -1 + 2x$ Sostituendo entrambe queste equazioni nella seconda otteniamo $2y(2-2x)-2x = 0$ cioé $2y-x-2xy = 0$. Quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2x \\ \lambda_2 = -1 + 2x \\ 2y - x - 2xy = 0 \\ x + y + z^2 - 2 = 0 \\ z^2 - y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora il sistema delle ultime 3 equazioni nelle incognite x, y, z. Dalla terza segue $z^2 = 2 + y^2$. Sostituendo questa nella seconda otteniamo $x + y + (2 + y^2) = 2$ da cui $x + y + y^2 = 0$ e quindi $x = -y - y^2$. Sostituendo quest'ultima nella prima otteniamo la seguente equazione in y

$$2y + y + y^2 + 2y(y + y^2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y(3 + 3y + 2y^2) = 0$$

Quest'ultima equazione ha come unica soluzione $y = 0$ dato che il discriminante del polinomio $3 + 3y + 2y^2$ vale $-15 < 0$. Quindi $y = 0$. Ne segue, dalla terza equazione che $z = \pm\sqrt{2}$ e, dalla seconda, che $x = 0$. I punti critici in questo caso sono quindi due e sono $(0, 0, \sqrt{2})$ e $(0, 0, -\sqrt{2})$.