

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Soluzioni dell'esame scritto del 05/07/2010

1. Siano dati i due operatori $\hat{A}, \hat{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & a \\ a^2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- (1 punti) a. Determinare almeno un vettore $\mathbf{v}$ che non appartiene all'immagine di $\hat{A}$.
(2 punti) b. Determinare il nucleo di $\hat{A}$.
(3 punti) c. Trovare quei valori di a per cui $\hat{A}$ ed $\hat{B}$ hanno lo stesso nucleo.

SOLUZIONE

- a. Un vettore $\mathbf{v}$ non appartiene all'immagine di $\hat{A}$ se $\text{Rg}(\hat{A}) < \text{Rg}(\hat{A}|\mathbf{v})$. Il rango di $\hat{A}$ è due (il determinante di $\hat{A}$ è zero perché la prima e la terza riga sono uguali, e perché il minore principale di grado 2 è a determinante diverso da zero), quindi basterà trovare un vettore linearmente indipendente dalle due prime colonne di $\hat{A}$:

$$\hat{A}|\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{pmatrix}.$$

Una semplice scelta di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed una verifica a posteriori sul determinante di una sottomatrice 3x3 di $\hat{A}|\mathbf{v}$ che contenga la prima colonna, la seconda colonna ed anche la colonna di $\mathbf{v}$ risponde alla domanda.

- b. Il nucleo di $\hat{A}$ lo si determina cercando le soluzioni del problema

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente essendo il determinante di $\hat{A}$ pari a zero esisteranno soluzioni non banali. Per risolvere il sistema sceglieremo come minore che determina il rango il minore principale di grado due:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- c. Perché $\hat{B}$ abbia lo stesso nucleo di $\hat{A}$ si dovrà imporre

$$\hat{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{x}$ è il vettore di base del nucleo:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & a \\ a^2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ a - a = 0 \\ a^2 - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow a = \pm 2$$

2. Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{x}' = \hat{A}\mathbf{x}'$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (2 punti) a. Determinarne la soluzione generale.
 (2 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio.
 (2 punti) c. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio.

SOLUZIONE

a. Determiniamo prima di tutto la decomposizione spettrale di $\hat{A}$:

$$\det(\hat{A} - \lambda \hat{J}) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(-1-\lambda).$$

Quindi lo spettro di $\hat{A}$ contiene un autovalore doppio $\lambda = 0$ e un autovalore semplice $\lambda = -1$. Andiamo a calcolare la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ per stabilire se abbiamo a che fare con un operatore diagonalizzabile o se siamo nel caso di Jordan:

$$\begin{aligned} \hat{A}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} & \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ y - z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nella ricerca degli autovettori associati a $\lambda = 0$ abbiamo determinato che $\text{Rg}(\hat{A} - \lambda \hat{J}) = 2$, e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è pari ad uno: siamo nel caso di Jordan. Troviamo il primo autovettore generalizzato associato a $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{A}\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0 & \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 1 \\ y - z = 1 \end{array} \right. \rightarrow \mathbf{v}'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'unico autovettore associato invece all'autovalore $\lambda = -1$ è:

$$\begin{aligned} (\hat{A} - \lambda \hat{J})\mathbf{v}_{-1} = \mathbf{0} & \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Completata la decomposizione spettrale, possiamo scrivere la matrice $\hat{A}$ rappresentandola nella base degli autovettori ed autovettori generalizzati $\mathbb{F} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}'_0, \mathbf{v}_{-1})$ con

$$\hat{A}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi scriviamo la soluzione generale come

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\hat{A}t)\mathbf{x}(0) = \hat{U} \exp(\hat{A}_{\mathbb{F}}t) \hat{U}^{-1} \mathbf{x}(0) = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

ovvero $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_0 + c_2 (t \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_0) + c_3 \mathbf{v}_{-1} e^{-t}$.

- b. Esistono infiniti punti di equilibrio associati all'autovalore $\lambda = 0$. Sono ∞^1 perché la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è pari ad 1. Tali punti di equilibrio sono $x_E = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- c. I punti di equilibrio sono instabili perché l'autovalore $\lambda = 0$ è non regolare, ossia $\text{ma}(\lambda = 0) < \text{mg}(\lambda = 0)$.

3. Data la funzione $f(x) = x^2(1 - x^2)$, si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

- (1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
(2 punti) b. Trovare i punti di equilibrio e disegnare il diagramma di fase.
(2 punti) c. Discutere, motivando la risposta, la stabilità dei punti di equilibrio e la monotonia delle soluzioni.
(1 punto) d. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale.

SOLUZIONE

- a. La funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2(1 - x^2),$$

è, continua su $(-\infty, +\infty)$ e derivabile con derivata continua in quanto è composizione di funzioni C^1 (è un polinomio). Quindi grazie al Teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.

- b.-c. L'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni: $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Questi sono i punti di equilibrio. Per disegnare il diagramma di fase occorre fare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$ da cui risultino gli intervalli in cui essa è positiva e quelli in cui è negativa.

Innanzitutto, i limiti agli estremi sono molto semplici e sono:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

Calcolando la derivata si ha

$$f'(x) = 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2).$$

Si ha quindi che

- $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$;
- $f'(x) < 0$ per $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$;
- $f'(x) = 0$ per $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Disegnando il grafico di f si ottiene quindi che le traiettorie del sistema crescono se il dato iniziale è $x_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ e decrescono se il dato iniziale è $x_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Ne segue che:

- il punto di equilibrio $x = 1$ è asintoticamente stabile e il suo bacino di attrazione è $(0, +\infty)$;
 - il punto di equilibrio $x = 0$ è instabile e asintoticamente stabile da sinistra (“semistabile”) e il suo bacino di attrazione è $(-1, 0]$;
 - il punto di equilibrio $x = -1$ è instabile.
- d. Il teorema di prolungamento (Teorema 2.4.21) può essere usato in questo caso per dedurre che, se $x_0 \in [-1, +\infty)$, l'unica soluzione è globale. Innanzitutto se $x_0 = -1, 0, 1$ la soluzione unica è costante ed è globale, in quanto sono punti di equilibrio. Inoltre, se $x_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, grazie al Teorema di Cauchy-Lipschitz, la soluzione $x(\cdot; 0, x_0)$ è compresa fra due punti di equilibrio (-1 e 0 nel primo caso e 0 e 1 nel secondo) ed è quindi limitata sul suo intervallo massimale. Quindi, per il Teorema 2.4.21, tale soluzione è globale. Se poi $x_0 \in (1, +\infty)$ allora la soluzione $x(t; 0, x_0)$ è sicuramente sempre > 1 sul suo intervallo massimale per il Teorema di Cauchy-Lipschitz. Inoltre essa è strettamente decrescente sul suo intervallo massimale per quanto visto nel diagramma di fase. Ne segue che $x(t; 0, x_0) \leq x_0$ per ogni t per cui la soluzione è limitata sul suo intervallo massimale e, per il Teorema 2.4.21, è globale.

4. Data la funzione $f(t, x) = ax + t$ (con $a \in \mathbb{R}$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(4 punti) a. Trovare la soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Trovare il limite della soluzione per $t \rightarrow +\infty$.

SOLUZIONE

a. Per trovare la soluzione basta applicare la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine (si vedano le dispense al capitolo sulle equazioni differenziali lineari):

$$x(t) = x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} s ds$$

Innanzitutto consideriamo il caso $a = 0$. In tal caso

$$x(t) = x_0 + \int_0^t s ds = x_0 + t$$

Sia ora $a \neq 0$. Svolgiamo l'integrale a secondo membro. Innanzitutto

$$\int_0^t e^{a(t-s)} s ds = e^{at} \int_0^t e^{-as} s ds$$

Svolgiamo l'integrale $\int_0^t e^{-as} s ds$ per parti:

$$\int_0^t e^{-as} s ds = \left[-\frac{e^{-as}}{a} s \right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{-as}}{a} ds = -\frac{e^{-at}}{a} t + \left[-\frac{e^{-as}}{a^2} \right]_0^t = -\frac{e^{-at}}{a} t + \frac{1 - e^{-at}}{a^2}$$

A questo punto, sostituendo nella formula iniziale abbiamo:

$$x(t) = x_0 e^{at} + e^{at} \left[-\frac{e^{-at}}{a} t + \frac{1 - e^{-at}}{a^2} \right] = x_0 e^{at} - \frac{t}{a} + \frac{e^{at} - 1}{a^2} = e^{at} \left[x_0 + \frac{1}{a^2} \right] + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}$$

b. Calcoliamo ora il limite di $x(t)$ per $t \rightarrow +\infty$. Sia $a = 0$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_0 + t = +\infty$$

Sia ora $a > 0$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} \left[x_0 + \frac{1}{a^2} \right] + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} = +\infty$$

dato che il primo termine tende $+\infty$, il secondo a $+\infty$ e il terzo è costante. Se invece $a < 0$ allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} \left[x_0 + \frac{1}{a^2} \right] + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} = -\infty$$

dato che il primo termine tende 0, il secondo a $-\infty$ e il terzo è costante.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie al variare dei parametri $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx^2(t)y(t) \\ y'(t) = 2y(t) - 3x(t)y(t) \end{cases}$$

- (2 punti) a. Determinare i punti di equilibrio al variare di $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
(4 punti) c. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio al variare di $a \neq 0$ e $b \neq 0$, sia per il sistema linearizzato che per il sistema nonlineare.

SOLUZIONE

- a. Per trovare i punti di equilibrio occorre risolvere il sistema

$$ax - bx^2y = 0, \quad 2y - 3xy = 0$$

Consideriamo la seconda equazione. Esse si riscrive come

$$y(2 - 3x) = 0 \iff y = 0, \quad \text{oppure} \quad x = \frac{2}{3}$$

Se $y = 0$, sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$ax = 0 \iff x = 0,$$

Troviamo quindi, in questo primo caso, il punto di equilibrio:

$$P_1 = (0, 0).$$

Passiamo al secondo caso, quello in cui $x = \frac{2}{3}$. In tal caso, sostituendo nella prima equazione abbiamo

$$\frac{2}{3}a - \frac{4}{9}by = 0 \iff y = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{b}.$$

Si trova quindi un secondo punto di equilibrio

$$P_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2} \frac{a}{b} \right)$$

- b. Per trovare il sistema linearizzato dobbiamo trovare il Jacobiano $Df(x, y)$ della funzione

$$f(x, y) = (ax - bx^2y, 2y - 3xy).$$

Si ha

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bxy & -bx^2 \\ -3y & 2 - 3x \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora il Jacobiano nei punti di equilibrio e discutiamo la stabilità di essi per il sistema linearizzato. Poi, usando il Teorema di Hartmann-Grossmann discuteremo la stabilità del sistema non lineare. Iniziamo da $P_1 = (0, 0)$.

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è diagonale e gli autovalori sono a e 2 . Il sistema linearizzato è sempre instabile perché uno degli autovalori è sempre > 0 . Dato che $a \neq 0$ tale matrice è sempre invertibile. Quindi, per il Teorema di Hartmann-Grossmann il punto di equilibrio è instabile anche per il sistema nonlineare.

Vediamo ora $P_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2} \frac{a}{b} \right)$

$$Df\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2} \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{4}{9}b \\ -\frac{9}{2} \frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante vale $-2a$, mentre la traccia vale $-a$. Quindi:

- se $a > 0$ allora il determinante è negativo e quindi vi sono due autovalori reali discordi. Questo significa che il punto di equilibrio per il linearizzato è un colle instabile;
- se $a < 0$ allora il determinante è positivo e la traccia è positiva. Questo significa che gli autovalori hanno parte reale concorde e positiva. Il punto di equilibrio per il linearizzato è quindi instabile; enditemize In entrambi i casi la matrice è invertibile e quindi per il Teorema di Hartmann-Grossmann il punto P_2 è sempre instabile.