

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 15/06/2010

1. Sia dato l'operatore $\hat{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$

- (3 punti) a. Trovare a e b in modo che l'equazione $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ammetta infinite soluzioni. Determinare tali soluzioni.
(3 punti) b. Per i valori di a precedentemente trovati, discutere la diagonalizzabilità di $\hat{L}$.

SOLUZIONE

a. Si hanno infinite soluzioni se e solo se $\det(\hat{L}) = 0$, per cui, $\det \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = a - 1 = 0$ implica $a = 1$.

Adesso bisogna imporre la condizione per cui il sistema abbia soluzioni, e quindi $\text{Rg}(\hat{L}) = \text{Rg}(\hat{L}|\mathbf{y})$. Il rango di $\hat{L}$ è pari a 2, visto che il determinante di $\hat{L}$ vale zero ed il minore 2x2 in alto a sinistra è sicuramente a determinante diverso da zero. Quindi bisogna imporre $\text{Rg}(\hat{L}|\mathbf{y}) = 2$, ossia

$\text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & b \end{pmatrix} = 2$. Per questo, è sufficiente orlare il minore 2x2 in alto a sinistra con la terza

riga e la quarta colonna di $(\hat{L}|\mathbf{y})$, $(\hat{L}|\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & \boxed{-1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 2 & \boxed{b} \end{pmatrix}$ e imporre a zero tale determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} = b + 1 - 1 = b = 0$$

- b. Indipendentemente dal valore di a , essendo la matrice $\hat{L}$ una matrice simmetrica, per il teorema spettrale essa è sempre diagonalizzabile. Comunque, in ogni caso, per stabilire la diagonalizzabilità di una matrice bisogna trovare una base completa di autovettori. Determiniamo quindi la decomposizione spettrale di $\hat{L}$:

$$\det(\hat{L} - \lambda \hat{I}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1) - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)\lambda(\lambda - 3).$$

Quindi lo spettro di $\hat{L}$ contiene tre autovalori semplici ai quali saranno associati tre autovettori indipendenti che pertanto formeranno una base completa per $\mathbb{R}^3$.

2. Sia dato il sistema di equazioni alle differenze in $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{x}_{n+1} = \hat{A}\mathbf{x}_n$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(2 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio e la loro stabilità.

(2 punti) c. Determinare il limite per $n \rightarrow \infty$ di $\mathbf{x}_n$ se $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SOLUZIONE

a. Determiniamo prima di tutto la decomposizione spettrale di $\hat{A}$:

$$\det(\hat{A} - \lambda \hat{J}) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(1 - \lambda).$$

Quindi lo spettro di $\hat{A}$ contiene due autovalori semplici pari a 0 e 1. Calcoliamo prima l'autovettore associato a $\lambda = 0$:

$$\hat{A}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1/2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{x/2 = -y/2 \rightarrow \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Calcoliamo ora l'autovettore associato a $\lambda = 1$:

$$(\hat{A} - \hat{J})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boxed{1/2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{x/2 = y/2 \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Completata la decomposizione spettrale, possiamo scrivere la matrice $\hat{A}$ rappresentandola nella base degli autovettori $\mathbb{F} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ con

$$\hat{A}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi scriviamo la soluzione generale come

$$\mathbf{x}_n = \hat{A}^n \mathbf{x}_0 = \hat{U} \hat{A}_{\mathbb{F}}^n \hat{U}^{-1} \mathbf{x}_0 = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

ovvero $\mathbf{x}_n = c_1 \mathbf{v}_1$.

b. I punti di equilibrio di un sistema di equazioni alle differenze $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ si calcolano ponendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, che nel nostro caso diventa $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Questa equazione ammette sempre la soluzione banale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ed ammette soluzioni non banali se $\det(\hat{A} - \hat{J}) = 0$, ovvero se la matrice $\hat{A}$ ammette $\lambda = 1$ come autovalore. Essendo proprio questo il caso, ci saranno infiniti punti di equilibrio che sono tutti i punti del sottospazio invariante associato all'autovalore $\lambda = 1$, ossia $\mathbf{x}_E = \alpha \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$. Tali punti di equilibrio saranno stabili in quanto tutti gli autovalori sono a modulo minore o uguale a 1: $\max_{\lambda \in \sigma(\hat{A})} |\lambda| \leq 1$.

c. La soluzione generale del sistema, $\mathbf{x}_n = c_1 \mathbf{v}_1$, è indipendente da n e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{A}^n \mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1.$$

Pertanto, per determinare il limite basterà calcolare c_1 a partire dalla matrice del cambiamento di base. Quindi bisognerà calcolare $\hat{U}^{-1}$ e quindi $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \hat{U}^{-1} \mathbf{x}_0$. Un altro modo, molto più semplice, per calcolare il limite, consiste nell'osservare che, visto che $\mathbf{x}_n$ è indipendente da n , $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_1 = \hat{A}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Data la funzione

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

- (1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
(2 punti) b. Trovare i punti di equilibrio e disegnare il diagramma di fase.
(2 punti) c. Discutere, motivando la risposta, la stabilità dei punti di equilibrio e la monotonia delle soluzioni.
(1 punto) d. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale.

SOLUZIONE

a. La funzione

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

è, continua su $(0, +\infty)$ e derivabile con derivata continua in quanto è composizione di funzioni C^1 . Inoltre nel punto $x = 0$ tale funzione è sicuramente continua in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0.$$

Tale limite si calcola ad esempio usando il Teorema di Bernoulli - De l'Hopital. Scriviamo infatti

$$x(\ln x)^2 = \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$$

La derivata del numeratore $(\ln x)^2$ è $2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$. La derivata del denominatore $\frac{1}{x}$ è $-\frac{1}{x^2}$. Quindi il limite del rapporto delle derivate è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x}}.$$

Il secondo limite vale 0 (un modo semplice per vederlo è applicare a tale limite il Teorema di Bernoulli - De l'Hopital esattamente come abbiamo appena fatto) e quindi anche il limite cercato è 0 e quindi la funzione f è continua anche in 0. La funzione non è derivabile a destra in 0 in quanto il limite del rapporto incrementale in 0^+ vale $+\infty$, come si verifica facilmente. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\ln x)^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty.$$

Quindi grazie al Teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale per ogni dato iniziale $x_0 > 0$. Invece se $x_0 = 0$ il Teorema di Peano (Corollario delle dispense) ci dice che esiste una soluzione locale. Non sappiamo se essa sia unica.

- b.-c. L'equazione $f(x) = 0$ ha due soluzioni $x = 0$ e $x = 1$. Questi sono i punti di equilibrio. Per disegnare il diagramma di fase occorre fare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$ da cui risultino gli intervalli in cui essa è positiva e quelli in cui è negativa.

Innanzitutto, i limiti agli estremi sono:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

Calcolando la derivata si ha

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x = \ln x(\ln x + 2).$$

Dato che

$$\ln x > 0 \iff x > 1 \quad e \quad \ln x + 2 > 0 \iff x > e^{-2}.$$

si ha

- $f'(x) > 0$ per $x \in (0, e^{-2}) \cup (1, +\infty)$;
- $f'(x) < 0$ per $x \in (e^{-2}, 1)$;
- $f'(x) = 0$ per $x = e^{-2}, 1$.

Disegnando il grafico di f si ottiene quindi che le traiettorie del sistema crescono se il dato iniziale è $x_0 \in (0, 1)$ e crescono anche se il dato iniziale è $x > 1$. Ne segue che entrambi i punti di equilibrio $x = 0$ e $x = 1$ sono *instabili*. Il punto $x = 1$ risulta *asintoticamente stabile da sinistra*: il suo bacino di attrazione è l'intervallo $(0, 1]$.

- d. Il teorema di prolungamento (Teorema 2.4.21) può essere usato in questo caso per dedurre che, se $x_0 \in (0, 1)$, l'unica soluzione è globale. Infatti, se $x_0 \in (0, 1)$ si ha che la soluzione $x(\cdot; 0, x_0)$ è strettamente crescente. Quindi $x(t; 0, x_0) \geq x_0$ per ogni t per cui la soluzione esiste. Inoltre per il Corollario del Teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, si ha che il punto di equilibrio $\bar{x} = 1$ è una barriera per le soluzioni. Quindi abbiamo anche $x(t; 0, x_0) < 1$. A questo punto possiamo applicare il teorema di prolungamento (Teorema 2.4.21) e troviamo che, se $x_0 \in (0, 1)$, l'unica soluzione è globale. Inoltre sappiamo che dal punto di equilibrio $\bar{x} = 1$ esce un'unica soluzione globale costante. Anche dal punto di equilibrio $\bar{x} = 0$ esce una soluzione globale costante ma non sappiamo se è unica. Quindi esiste un'unica soluzione globale per $x_0 \in (0, 1]$.

4. Data la funzione $f(x) = x - a \sin x$ (con $a > 0$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(3 punti) a. Trovare i punti di equilibrio al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(3 punti) b. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

SOLUZIONE

a. Per trovare i punti di equilibrio basta risolvere l'equazione

$$f(x) = x \iff x - a \sin x = x.$$

Fissato $a > 0$ le soluzioni di questa equazione sono i punti in cui $\sin x = 0$. Tali punti costituiscono l'insieme

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

b. Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio usiamo il Teorema..... Esso dice che, se $|f'(\bar{x})| < 1$ il punto di equilibrio $\bar{x}$ è stabile. Se invece $|f'(\bar{x})| > 1$ il punto è instabile. Se infine $|f'(\bar{x})| = 1$ niente si può dire a priori. Nel nostro caso si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - a \cos x$$

Ora

$$1 - a \cos x < 1 \iff a \cos x > 0.$$

Dato che $a > 0$ si ha allora che

$$f'(x) < 1 \iff \cos x > 0.$$

D'altra parte

$$f'(x) > -1 \iff \cos x < \frac{2}{a}.$$

Ne segue che un punto di equilibrio $\bar{x} \in A$ è stabile se

$$0 < \cos \bar{x} < \frac{2}{a}$$

Inoltre un punto di equilibrio $\bar{x} \in A$ è instabile se

$$\cos \bar{x} < 0 \quad oppure \quad \cos \bar{x} > \frac{2}{a}$$

Ora ricordiamo che ogni punto di equilibrio è della forma $\bar{x} = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Quindi

$$\cos \bar{x} = \cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi, se k è dispari, il punto d'equilibrio $\bar{x} = k\pi$ è instabile qualunque sia il valore del parametro $a > 0$.

Se invece k è pari, il punto d'equilibrio $\bar{x} = k\pi$ è:

- stabile se $\frac{2}{a} > 1$
- instabile se $\frac{2}{a} < 1$
- non si sa se $\frac{2}{a} = 1$

In realtà in quest'ultimo caso ($a = 2$) il punto di equilibrio è stabile. Ciò discende dal fatto che, mentre nel punto di equilibrio si ha $f'(x) = -1$, esiste un intorno del punto di equilibrio (ad esempio nel caso $\bar{x} = 0$) in cui $f'(x) \in (-1, 0)$. Si può dimostrare che ciò è sufficiente per avere stabilità.

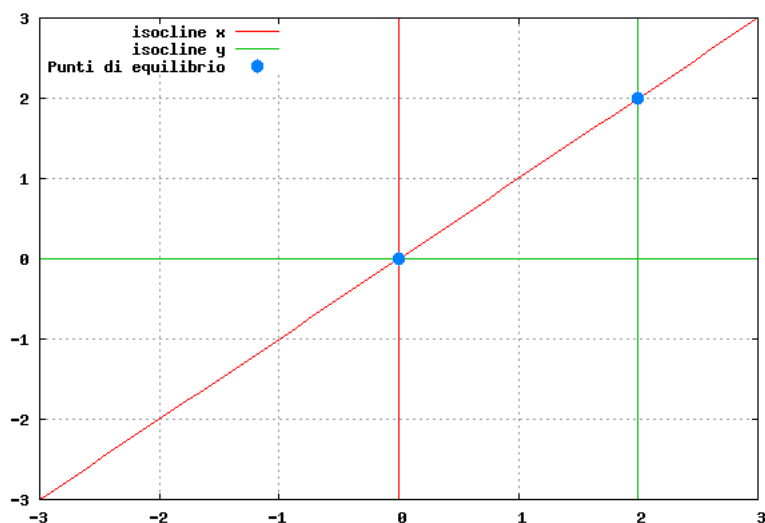
5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) = -2y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

- (2 punti) a. Disegnare le isocline del sistema (i.e., le curve di equazioni $x' = 0$ e $y' = 0$).
 (2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio discutendone la stabilità.
 (2 punti) c. Determinare le traiettorie del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio con $x > 0$ e $y > 0$.

SOLUZIONE

- a. Le isocline si ottengono ponendo $x'(t) = 0$ e $y'(t) = 0$:
 isocline $x' = 0$: $x^2 - xy = x(x - y) = 0$ implica $x = 0$ oppure $x = y$.
 isocline $y' = 0$: $-2y + xy = y(x - 2) = 0$ implica $y = 0$ oppure $x = 2$.



- b. Per verificare i punti di equilibrio determinati per mezzo dello studio delle isocline, bisogna risolvere analiticamente il sistema non lineare $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, ossia

$$\begin{cases} x^2 - xy = 0 \\ -2y + xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x - y) = 0 \\ y(x - 2) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha due soluzioni:

- 1) $x = 0$ che inserito nella seconda equazione determina $y = 0$,
- 2) $x = y$ che inserito nella seconda equazione determina $y = 2$ che riportato nella prima equazione determina $x = 2$.

Pertanto i punti di equilibrio sono $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Per determinare la natura dei punti di equilibrio, per il teorema di Hartmann-Grossmann dobbiamo studiare lo Jacobiano del sistema: $\hat{J}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ y & x - 2 \end{pmatrix}$. Determiniamo lo spettro dello Jacobiano sui punti di equilibrio:

$\hat{J}_f(\mathbf{P}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice è diagonale e possiede due autovalori distinti $\lambda = 0$ e $\lambda = -2$. A causa dell'autovalore $\lambda = 0$ non possiamo dire niente sulla stabilità del punto di equilibrio.

$\hat{J}_f(\mathbf{P}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di questa matrice sono $\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$, complessi coniugati a parte reale positiva, il punto di equilibrio è instabile.

- c. Visto che la linearizzazione intorno al punto di equilibrio $\mathbf{P}_2$ possiede autovalori complessi coniugati a parte reale positiva, tale punto di equilibrio sarà un fuoco instabile. Per capire il verso delle traiettorie di fase (se orario o antiorario) sarà sufficiente verificare il verso del campo di velocità nelle vicinanze del punto di equilibrio. Per esempio, nella posizione $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ il cam-

po vale $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ossia punta in basso. Pertanto il verso delle traiettorie di fase sarà antiorario.

