LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2009/2010

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 25/02/2010

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -3 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinare i valori di a per cui l'operatore $\hat{L}$ ammetta sottospazi invarianti reali.

(3 punti) b. Fissato un valore di a tra quelli precedentemente trovati determinare $\hat{L}^{-n}$ come inversa di $\hat{L}^n$ (ossia in modo che $\hat{L}^{-n}\hat{L}^n = \hat{\mathfrak{I}}$). Verificare il risultato.

SOLUZIONE

a. Condizione perché l'operatore $\hat{L}$ ammetta sottospazi invarianti reali è che abbia almeno un autovalore reale. Calcoliamo quindi gli autovalori di $\hat{L}$

$$\det(\hat{L} - \lambda\hat{\mathfrak{I}}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -a \\ a & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) + a^2 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 + a^2 = 0\,.$$

Perché questo polinomio abbia radici reali è necessario che il suo discriminante sia maggiore o uguale a 0:

$$\Delta = 16 - 4a^2 \geq 0 \qquad \to \qquad -2 \leq a \leq 2\,.$$

b. Il procedimento per calcolare $\hat{L}^{-n}$ consiste nel calcolare prima $\hat{L}^n$ e successivamente invertire questa matrice. Poiché siamo liberi di scegliere a nel range $-2 \leq a \leq 2$ scegliamo $a = 0$ che è la scelta che maggiormente semplifica l'operatore $\hat{L}$ che diventa diagonale:

$$\hat{L} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \to \qquad \hat{L}^n = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \qquad \to \qquad \hat{L}^{-n} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^{-n} \end{pmatrix}\,.$$

La verifica del risultato è in questo caso banale.

2. Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{x}'(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t)$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio e la loro stabilità.

SOLUZIONE

a. Effettuiamo la decomposizione spettrale dell'operatore. Iniziamo con il calcolarne gli autovalori:

$$\det(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda((1-\lambda)^2 - 1) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda^2(2-\lambda) = 0\,.$$

Pertanto gli autovalori sono $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica pari a 2 e $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica pari a 1. Calcoliamo gli autovettori:

(a) Autovettori associati a $\lambda = 0$, $(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}})\mathbf{v} = \hat{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. In questo caso, il rango della matrice $(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}}) = \hat{A}$ è pari ad uno, e quindi l'equazione $\hat{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ammette infinito alla due soluzioni a cui sono associati due autovettori indipendenti.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \{ \; x + y = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{0_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{0_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Autovettore associato a $\lambda = 2$, $(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}})\mathbf{v} = (\hat{A} - 2\hat{\mathfrak{I}})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. In questo caso il rando di $(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}})$ è pari a due, e quindi abbiamo un solo autovettore.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avendo determinato tre autovettori indipendenti definiamo una nuova base $\mathbb{F} = (\mathbf{v}_{0_1}\mathbf{v}_{0_2}\mathbf{v}_2)$ con associata la matrice del cambiamento di base

$$\hat{U} = \left(\begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_{0_1} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_{0_2} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_2 \\ \\ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

otteniamo la soluzione generale come:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\hat{A}t}\mathbf{x}(0) = \hat{U}e^{\hat{A}_{\mathbb{F}}t}\hat{U}^{-1}\mathbf{x}(0) = \left(\begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_{0_1} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_{0_2} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_2 \\ \\ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

ma, in questo caso, visto che abbiamo una base completa di autovettori, possiamo scrivere:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_{0_1} + c_2\mathbf{v}_{0_2} + c_3\mathbf{v}_2 e^{2t}\,.$$

b. I punti di equilibrio delle equazioni differenziali si ottengono ponendo $f(x) = 0$. In questo caso, si dovrà avere $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tale equazione ammette sempre la soluzione banale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si hanno più soluzioni se $\det(\hat{A}) = 0$. In questo caso, non solo $\det(\hat{A}) = 0$ ma il rango di $\hat{A}$ è pari ad uno. Per cui si avranno inifito alla due soluzioni del sistema $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che individuano un piano determinato dai due autovettori associati a $\lambda = 0$. Tutti i punti di tale piano sono punti di equilibrio. Per quanto riguarda la loro natura, essi saranno instabili, in quanto nello spettro di $\hat{A}$ è presente un autovalore maggiore di 0.

3. Data la funzione $f(x) = x\ \mathrm{arctg}x$, si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Disegnare il diagramma di fase.

(1 punto) c. Trovare i punti di equilibrio e dire se sono stabili o no.

(2 punti) d. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ le soluzioni locali sono anche globali.

SOLUZIONE

a. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\ \mathrm{arctg}x$, è, continua e derivabile con derivata continua in quanto è composizione di funzioni C^1. Perciò, grazie al teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.

b.-c. L'equazione $f(x) = 0$ ha per unica soluzione $x = 0$ dato che la funzione $f(x)$ è il prodotto di due funzioni che si annullano entrambe solo in $x = 0$. Quindi l'unico punto di equilibrio è $x = 0$. Per disegnare il diagramma di fase occorre fare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$ da cui risultino gli intervalli in cui essa è positiva e quelli in cui è negativa.

Innanzitutto, usando che

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

e usando il teorema sul limite del prodotto, è immediato vedere che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

Calcolando la derivata si ha

$$f'(x) = \mathrm{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}.$$

Osserviamo ora che ciascuno dei due addendi è strettamente positivo per $x > 0$ ed è strettamente negativo per $x < 0$. Ne segue che

- $f'(x) > 0$ per $x > 0$;
- $f'(x) < 0$ per $x < 0$;
- $f'(x) = 0$ per $x = 0$.

Ne segue che $x = 0$ è l'unico punto di minimo locale e globale (con $f(0) = 0$). Quindi

- $f(x) > 0$ per $x \neq 0$;
- $f(x) = 0$ per $x = 0$.

Disegnando il grafico di f si ottiene quindi che le traiettorie del sistema crescono se il dato iniziale è $x < 0$ e crescono anche se il dato iniziale è $x > 0$. Ne segue che il punto di equilibrio $x = 0$ è *instabile*.

d. Il teorema di prolungamento (Teorema 2.4.21) non può essere usato in questo caso (o meglio può essere usato solo per dedurre che, se $x_0 < 0$, l'unica soluzione è globale). Tuttavia possiamo usare l'altro teorema di esistenza e unicità globale (Teorema 2.4.20). Infatti, dallo studio fatto al punto b) scopriamo che la funzione f è definita su $\mathbb{R}$, è ivi derivabile e la sua derivata ivi limitata. Il Teorema 2.4.20 assicura allora che il nostro problema di Cauchy ha soluzione globale unica per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ (e questo è vero anche per tempi negativi).

4. Data la funzione $f(t, x) = (t+1)x + a$ (con $a \in \mathbb{R}$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x_{t+1} = f(t, x_t) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$.

(3 punti) a. Trovare la soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(3 punti) b. Nel caso in cui $a = 0$ trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

SOLUZIONE Per trovare la soluzione basta applicare la formula (si vedano le dispense al capitolo sulle equazioni alle differenze)

$$x(t) = x_0 \Pi_{s=0}^{t-1}(s+1) + \sum_{s=0}^{t-1} a \Pi_{r=s+1}^{t-1}(r+1)$$

Usando che

$$\Pi_{s=0}^{t-1}(s+1) = t!, \qquad \Pi_{r=s+1}^{t-1}(r+1) = \frac{t!}{(s+1)!}$$

si ha quindi:

$$x(t) = x_0 \cdot t! + \sum_{s=0}^{t-1} a \frac{t!}{(s+1)!}$$

che, volendo, si può riscrivere come

$$x(t) = x_0 \cdot t! + at! \cdot \sum_{s=0}^{t-1} \frac{1}{(s+1)!}$$

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie (preda-predatore con competizione per le risorse):

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t)(M - x(t)) - x(t)y(t) \\ y'(t) = -by(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

(3 punti) a. Trovare i punti di equilibrio al variare dei parametri $a, b, M > 0$.

(3 punti) b. Discutere la loro stabilità.

SOLUZIONE

a. Per trovare i punti di equilibrio occorre risolvere il sistema

$$ax(M - x) - xy = 0, \qquad\qquad -by + xy = 0$$

Consideriamo la seconda equazione. Esse si riscrive come

$$y(-b + x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0, \quad oppure \quad x = -b$$

Se $y = 0$, sostituendo nella prim equazione otteniamo

$$ax(M - x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \quad oppure \quad x = M$$

Troviamo quindi, in questo primo caso, due punti di equilibrio:

$$P_1 = (0, 0), \qquad P_2 = (M, 0)$$

Passiamo al secondo caso, quello in cui $x = b$. In tal caso, sostituendo nella prima equazione abbiamo

$$ab(M - b) - by = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = a(M - b).$$

Si trova quindi un terzo punto di equilibrio

$$P_3 = (b, a(M - b))$$

Se $b = M$ (cosa possibile con le nostre ipotesi) allora $P_3 = P_2$. Quindi in tal caso i punti di equilibrio sono 2. Negli altri casi i punti di equilibrio sono 3. Notiamo che P_1 e P_2 stanno sempre nell'ortante semipositivo. Invece P_3 sta nell'ortante positivo solo se $b < M$. Se $b > M$ sta nel quarto quadrante.

b. Per discutere la stabilità dei punti di equilibrio dobbiamo trovare il Jacobiano $Df(x, y)$ della funzione

$$f(x, y) = (ax(M - x) - xy, -by + xy)\,.$$

Si ha

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} aM - 2ax - y & -x \\ y & -b + x \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora il Jacobiano nei punti di equilibrio e discutiamo la stabilità usando il Teorema di Hartmann-Grossmann. Iniziamo da $P_1 = (0, 0)$.

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} aM & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Da qui segue che il punto $P_1 = (0, 0)$ è un colle instabile. Vediamo ora $P_2 = (M, 0)$

$$Df(M, 0) = \begin{pmatrix} -aM & -M \\ 0 & -b + M \end{pmatrix}.$$

Dato che la matrice è triangolare superiore gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale: $-aM < 0$ e $-b + M$. Quindi:

- se $-b + M < 0$, cioè $M < b$, allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile (ricordiamo che in tal caso il punto di equilibrio $P_3 = (b, a(M - b))$ sta nel quarto quadrante);

- se $-b+M>0$, cioè $M>b$, allora il punto di equilibrio è un colle instabile (ricordiamo che in tal caso il punto di equilibrio $P_3=(b,a(M-b))$ sta nel primo quadrante);
- se $-b+M=0$, cioè $M=b$, allora il Teorema di Hartmann-Grossmann non permette di dare risposte (ricordiamo che in tal caso il punto di equilibrio $P_3=P_2$ e quindi vi sono solo due punti di equilibrio). Possiamo dire che nel sistema linearizzato vi sono infiniti punti di equilibrio che sono stabili ma non asintoticamente stabili.

Vediamo infine $P_3=(b,a(M-b))$.

$$Df(b,a(M-b))=\begin{pmatrix} -ab & -b \\ a(M-b) & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante vale $ab(M-b)$, mentre la traccia vale $-ab<0$. Quindi:

- se $M-b<0$, cioè $M<b$, allora il determinante è negativo e quindi vi sono due autovalori reali discordi. Questo significa che il punto di equilibrio è un colle instabile (ricordiamo che in tal caso il punto di equilibrio $P_2=(M,0)$ è asintoticamente stabile);
- se $M-b>0$, cioè $M>b$, allora il determinante è positivo e la traccia è negativa. Questo significa che gli autovalori hanno parte reale concorde e negativa. Il punto di equilibrio è quindi asintoticamente stabile (ricordiamo che in tal caso il punto di equilibrio $P_3=(b,a(M-b))$ sta nel primo quadrante);
- se $-b+M=0$, cioè $M=b$, allora $P_3=P_2$ e vale quanto detto per il punto P_2 in questo caso.