LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2009/2010

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Soluzioni dell'esame scritto del 16/02/2010

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinare i valori di a per cui $\mathrm{Ker}(\hat{L}) = \{\mathbf{0}\}$.

(3 punti) b. Mostrare che esistono autovettori di $\hat{L}$ che non dipendono dal parametro a.

SOLUZIONE

a. Condizione perché il $\mathrm{Ker}(\hat{L})$ sia composto dal solo vettore nullo, è che l'equazione $\hat{L}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ammetta la sola soluzione banale $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, e quindi $\det(\hat{L}) \neq 0$. Sviluppando il determinante rispetto alla terza riga di $\hat{L}$ si ha

$$\det(\hat{L}) = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = a(1-a^2)\,.$$

Il determinante è diverso da zero se $a \neq 0, \pm 1$.

b. Per determinare gli autovettori di $\hat{L}$ e verificare che non dipendono da a possiamo procedere in due modi, il primo, cercare direttamente le soluzioni per $\hat{L}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, mentre il secondo passa prima per la ricerca degli autovalori.
Vediamo il primo metodo:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} x + ay = \lambda x \\ ax + y = \lambda y \\ az = \lambda z \end{cases}$$

Visto che siamo interessati a mostrare che almeno un autovettore è indipendente da a, se poniamo $x, y = 0$ e $\lambda = a$, il sistema $\hat{L}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ si riduce a $z = 1$. Per cui il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per $\hat{L}$ indipendentemente dal valore di a.
Il secondo metodo, più elaborato, consiste prima nel ricavare gli autovalori di $\hat{L}$:

$$\det(\hat{L} - \lambda\hat{\mathbb{J}}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)((1-\lambda)^2 - a^2) = 0\,.$$

Per cui gli autovalori sono $\lambda = a$ (già trovato nel primo metodo risolutivo) e $((1-\lambda)^2 - a^2) = 0 \to (1-\lambda)^2 = a^2 \to 1 - \lambda = \pm a \to \lambda = 1 \pm a$. Quindi, una volta trovati gli autovalori si cercano gli autovettori corrispondenti:

(a) Autovettore associato a $\lambda = a$, $(\hat{L} - a\hat{\mathbb{J}})\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{1-a}} & \boxed{\text{a}} & 0 \\ \boxed{\text{a}} & \boxed{\text{1-a}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} (1-a)x + ay = 0 \\ ax + (1-a)y = 0 \end{cases} \quad \to \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Autovettore associato a $\lambda = 1 - a$, $(\hat{L} - (1-a)\hat{\mathbb{J}})\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & \boxed{a} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{-1+2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} ax + ay = 0 \\ (-1+2a)z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Autovettore associato a $\lambda = 1 + a$, $(\hat{L} - (1+a)\hat{\mathbb{J}})\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ a & \boxed{-a} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} ax - ay = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, tutti e tre gli autovettori di $\hat{L}$ sono indipendenti da a. Bisogna notare che le sottomatrici che determinano il rango sono corrette solo nel caso in cui $a \neq 0$. Però, anche in questo caso, gli autovettori di $\hat{L}$ continuano ad essere quelli che abbiamo ricavato.

2. Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{x}'(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t)$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a+1 & -3 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale fissando a in modo da avere spettro complesso.

(2 punti) b. Determinare la soluzione particolare passante per $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$.

(1 punti) c. Determinare a in modo da avere infiniti punti di equilibrio. Discuterne la stabilità.

SOLUZIONE

a. Determiniamo prima di tutto lo spettro di $\hat{A}$:

$$\det(\hat{A} - \lambda\hat{\mathbb{J}}) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ a+1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 + a \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-a}\,.$$

Per cui per avere spettro complesso occorrerà avere $a > 0$. In questo caso, gli autovalori di $\hat{A}$ sono $\lambda = \lambda_a \pm i\lambda_b = -2 \pm i\sqrt{a}$. Per determinare gli autovettori fissiamo $\lambda = -2 + i\sqrt{a}$: $(\hat{A} - (-2 + 1\sqrt{a})\hat{\mathbb{J}})\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 - i\sqrt{a}} & -1 \\ a+1 & -1-i\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (1 - i\sqrt{a})x = y \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

per cui possiamo scrivere $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a + i\mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{a} \end{pmatrix}$, e quindi determiniamo la matrice del cambiamento di base $\hat{U} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}$. La soluzione generale sarà pertanto:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\hat{A}t}\mathbf{x}(0) = \hat{U}e^{\hat{A}_{\mathbb{F}}t}\hat{U}^{-1}\mathbf{x}(0) = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_b \end{pmatrix} \right) e^{\lambda_a t} \begin{pmatrix} \cos(\lambda_b t) & \sin(\lambda_b t) \\ \sin(\lambda_b t) & \cos(\lambda_b t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a}t) & \sin(\sqrt{a}t) \\ \sin(\sqrt{a}t) & \cos(\sqrt{a}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

b. Per quanto riguarda la soluzione particolare, possiamo calcolarla o determinando $\hat{U}^{-1}$ o risolvendo un semplice sistema.

Vediamo il primo metodo. $\det(\hat{U}) = -\sqrt{a}$, e $\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{a} & -1/\sqrt{a} \end{pmatrix}$. Per cui

$$\mathbf{x}(t) = e^{\hat{A}t}\mathbf{x}(0) = \hat{U}e^{\hat{A}_{\mathbb{F}}t}\hat{U}^{-1}\mathbf{x}(0)\,,$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a}t) & \sin(\sqrt{a}t) \\ \sin(\sqrt{a}t) & \cos(\sqrt{a}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{a} & -1/\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Oppure, con il secondo metodo, si procede con il calcolo di $\mathbf{x}(0)$:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -1/\sqrt{a} \end{cases} .$$

c. Per avere infiniti punti di equilibrio si dovrà avere un autovalore pari a zero, e quindi visto che $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-a}$ dovremo porre $a = -4$ e quindi $\lambda_{1,2} = 0, -4$. I punti di equilibrio si trovano sullo spazio invariante relativo all'autovettore associato a $\lambda = 0$. Tali punti sono stabili perché l'altro autovalore è negativo, e l'autovalore zero ha molteplicità algebrica pari alla molteplicità geometrica (ossia è un autovalore regolare).

3. Data la funzione $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} - a$ (con $a \geq 0$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Fissato $a = 0$, trovare i punti di equilibrio, dire se sono stabili o no e disegnare il diagramma di fase.

(1 punto) c. Fissare $a = 0$. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ le soluzioni locali sono anche globali.

(2 punti) d. Sia $a > 0$. Trovare i punti di equilibrio al variare di a e dire se sono stabili o instabili.

SOLUZIONE

a. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} - a$, è, per ogni $a \geq 0$, continua e derivabile con derivata continua in quanto è composizione di funzioni C^1. Perciò, grazie al teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.

b. Se $a = 0$ allora $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. L'equazione $f(x) = 0$ in tal caso ha per unica soluzione $x = 0$ che è quindi l'unico punto di equilibrio. Per disegnare il diagramma di fase occorre fare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$ da cui risultino gli intervalli in cui essa è positiva e quelli in cui è negativa.

Innanzitutto è immediato vedere che, usando ad esempio il Teorema di Bernoulli-de l'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Vediamolo per il limite a $-\infty$ (l'altro è analogo). Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Se calcoliamo il limite del rapporto delle derivate otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Calcolando la derivata si ha

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}[1 - x^2].$$

Quindi

- $f'(x) > 0$ per $x \in (-1, 1)$;
- $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;
- $f'(x) = 0$ per $x = \pm 1$.

Ne segue che $x = -1$ è punto di minimo locale e globale (con $f(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} < 0$) mentre $x = 1$ è punto di massimo locale e globale (con $f(1) = e^{-\frac{1}{2}} > 0$). Quindi

- $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0)$;
- $f(x) < 0$ per $x \in (0, +\infty)$;
- $f(x) = 0$ per $x = 0$.

Disegnando il grafico di f si ottiene quindi che le traiettorie del sistema decrescono se il dato iniziale è $x < 0$ mentre crescono se il dato iniziale è $x > 0$. Ne segue che il punto di equilibrio $x = 0$ è *instabile*.

c. Il teorema di prolungamento (Teorema 2.4.21) non può essere usato in questo caso. Tuttavia possiamo usare l'altro teorema di esistenza e unicità globale (Teorema 2.4.20). Infatti, dallo studio fatto al punto b) scopriamo che la funzione f è definita su $\mathbb{R}$ e ivi limitata. Il Teorema 2.4.20 assicura allora che il nostro problema di Cauchy ha soluzione globale unica per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ (e questo è vero anche per tempi negativi).

d. Sia $a > 0$. Anche in tal caso i punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ tuttavia qui non è possibile determinarli esplicitamente. Possiamo determinare quanti sono studiando la funzione f. Usando quanto scoperto nel caso $a = 0$ abbiamo che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -a, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -a.$$

La derivata di f è la stessa che nel caso $a = 0$. Si ha quindi

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}[1 - x^2].$$

Quindi

- $f'(x) > 0$ per $x \in (-1, 1)$;
- $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;
- $f'(x) = 0$ per $x = \pm 1$.

Ne segue che $x = -1$ è punto di minimo locale e globale (con $f(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} - a < 0$ dato che $a > 0$) mentre $x = 1$ è punto di massimo locale (con $f(1) = e^{-\frac{1}{2}} - a$ il cui segno dipende dal valore di a). Quindi, usando i teoremi di esistenza e unicità degli zeri avremo che

(i) se $f(1) < 0$ (cioè se $a > e^{-\frac{1}{2}}$) allora la funzione è sempre < 0 e non vi sono punti di equilibrio;

(ii) se $f(1) = 0$ (cioè se $a = e^{-\frac{1}{2}}$) allora la funzione è sempre ≤ 0 e si annulla solo in $x = 1$. In tal caso vi è un solo punto di equilibrio $x = 1$;

(iii) se $f(1) > 0$ (cioè se $0 < a < e^{-\frac{1}{2}}$) allora la funzione ha due zeri, uno nell'intervallo $(0, 1)$ e l'altro nell'intervallo $(1, +\infty)$;

Nel caso (ii) l'unico punto di equilibrio è instabile (in esso la derivatà di f è nulla e quindi non si può usare il Teorema di Hartmann-Grossmann per dedurne la stabilità, tuttavia dal diagramma di fase si vede che le traiettorie del sistema sono decrescenti sia a destra che a sinistra di esso. Possiamo quindi dire che il punto $x = -1$ in tal caso è instabile e stabile da sinistra.

Nel caso (iii) vi sono due punti di equilibrio: $x_1 \in (0, 1)$ e $x_2 \in (1, +\infty)$. Dallo studio del segno di f' (o dal diagramma di fase) vediamo subito che $f' > 0$ su $(0, 1)$ e quindi anche $f'(x_1) > 0$ e quindi il punto di equilibrio x_1 è instabile. Analogamente dallo studio del segno di f' (o dal diagramma di fase) vediamo subito che $f' < 0$ su $(1, +\infty)$ e quindi anche $f'(x_2) < 0$ e quindi il punto di equilibrio x_1 è asintoticamente stabile. Il suo bacino di attrazione sarà $(x_1, +\infty)$.

4. Data la funzione $f(x) = ax(1 - x)$ (con $a > 1$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$.

(2 punti) a. Trovare i punti di equilibrio al variare di $a > 1$.

(2 punti) b. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio al variare di $a > 1$.

(2 punti) c. Sia $a = 2$. Calcolare $g(x) = f \circ f(x)$ e dire quanti punti di equilibrio ha la ED $x_{n+1} = g(x_n)$. Facoltativo: esiste un legame tra i punti di equilibrio trovati e quelli della ED iniziale? Perché?

SOLUZIONE

a. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quindi, per il Teorema 2.1.7 esiste un unica soluzione globale per ogni valore di x_0. I punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = x$. Svolgendo i calcoli si ha

$$ax(1-x) = x \iff (a-1)x - ax^2 = 0$$
$$\iff x[(a-1) - ax] = 0.$$

Quindi i punti di equilibrio sono

$$x = 0, \qquad e \qquad x = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a} > 0.$$

Notate come il secondo punto di equilibrio sia positivo grazie al fatto che $a > 1$.

b. La funzione f è C^1 su $\mathbb{R}$. Usiamo il teorema di Hartmann-Grossmann per studiare la stabilità dei punti di equilibrio al variare di $a > 1$. Innanzitutto

$$f'(x) = a - 2ax$$

quindi

$$f'(0) = a, \qquad e \qquad f'\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a - 2a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = -a + 2$$

Dato che $a > 1$ si ha che $|f'(0)| = a > 1$ e quindi il punto di equilibrio $x = 0$ è instabile qualunque sia il valore di $a > 1$. Invece $\left|f'\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right| = |2 - a|$. Ora

$$|2-a| < 1 \iff \begin{cases} 2 - a < 1 \\ 2 - a > -1 \end{cases}$$
$$\iff a \in (1, 3)$$

Quindi, se $a \in (1, 3)$ il punto è asintoticamente stabile, mantre se $a > 3$ il punto è instabile. Se $a = 3$ non possiamo dire nulla con il solo aiuto del Teorema di Hartmann-Grossmann.

c. Sia a=2. Dato che la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$ sappiamo che la funzione $g = f \circ f$ è ben definita su $\mathbb{R}$. Si ha

$$g(x) = f(f(x)) = 2f(x)(1 - f(x)) = 2[2x(1-x)](1 - [2x(1-x)]) = 4x(1-x)(1 - 2x + 2x^2)$$

Per dire quanti punti di equilibrio ha la ED $x_{n+1} = g(x_n)$ basta dire quante soluzioni ha l'equazione $g(x) = x$. L'equazione si scrive come:

$$4x(1-x)(1 - 2x + 2x^2) = x \iff 4x(1-x)(1 - 2x + 2x^2) - x = 0$$

e, racogliendo a fattor comune x a primo membro:

$$\iff x[4(1-x)(1 - 2x + 2x^2) - 1] = 0$$

Vediamo quindi che l'equazione $g(x) = 0$ ha sicuramente come soluzione $x = 0$. Per vedere se ha altre soluzioni (e quante sono) occorre, per la legge di annullamento del prodotto, studiare l'equazione:

$$4(1-x)(1 - 2x + 2x^2) - 1 = 0 \iff 3 - 12x + 16x^2 - 8x^3 = 0$$

Si tratta di un'equazione di terzo grado. Quindi le soluzioni sono al massimo 3. Per sapere quante sono possiamo studiare la funzione a primo membro:

$$h(x) = 3 - 12x + 16x^2 - 8x^3$$

Si vede facilmente che, essendo negativo il coefficiente del termine di grado massimo:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty.$$

Inoltre

$$h'(x) = -12 + 32x - 24x^2 = 4(-3 + 8x - 6x^2)$$

Dato che il polinomio di secondo grado $-3 + 8x - 6x^2$ ha discriminante negativo, tale polinomio è sempre negativo per ogni valore di x. Quindi

$$h'(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che h è strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$. Per il teorema di esistenza e unicità degli zeri si ha che esiste un unico zero x_1 di h su $\mathbb{R}$. Inoltre $x_1 \neq 0$ dato che $h(0) \neq 0$. Ne segue che l'equazione $g(x) = x$ ha esattamente due soluzioni e quindi vi sono due punti di equilibrio per la ED associata a g.

E' possibile risolvere il problema anche scomponendo il polinomio $h(x)$ con la regola di Ruffini. In tal caso si trova anche il valore della radice x_1 che è $1/2$.

Facoltativo: esiste un legame tra i punti di equilibrio trovati e quelli della ED iniziale? Perché?

Il legame è il seguente: i punti di equilibrio per la ED associata a g sono gli stessi di quelli della ED associata a f. Infatti abbiamo il seguente Teorema.

Data una qualunque funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$), le soluzioni dell'equazione $f(x) = x$ risolvono anche l'equazione $f \circ f(x) = x$.

Infatti se $\bar{x}$ è tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$ si ha, utilizzando due volte tale fatto:

$$f(f(\bar{x})) = f(\bar{x}) = \bar{x}$$

e quindi $\bar{x}$ risolve anche l'equazione $f \circ f(x) = x$.

Da tale teorema sappiamo quindi che i due punti di equilibrio della ED associata a f sono anche punti di equilibrio della ED associata a g. Poichè abbiamo scoperto (al punto c) sopra) che i punti di equilibrio della ED associata a g sono solo due, essi devono essere per forza quelli della ED associata a f. Curiosità: come si vede sul libro di testo, se ce ne fossero stati altri due essi avrebbero costituito un'orbita periodica di periodo due per l'ED associata a f.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)y(t) + x^3(t) \\ y'(t) = y(t) - 2x(t) - 1 \end{cases}$$

(2 punti) a. Determinare le equazioni delle curve isocline ($x' = 0$ e $y' = 0$) e darne una rappresentazione grafica.

(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.

(2 punti) b. Tracciare il diagramma di fase del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio con y positiva.

SOLUZIONE

a. Le equazioni delle isocline sono

$$xy + x^3 = 0, \qquad\qquad y - 2x - 1 = 0$$

Consideriamo la prima

$$xy + x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \quad \textit{oppure} \quad y = -x^2$$

Quindi il grafico di questa isoclina è costituito dall'*unione* (dato che abbiamo usato "oppure") della retta verticale di equazione $x = 0$ e della parabola a concavità rivolta verso il basso di equazione $y = -x^2$.

Consideriamo la seconda

$$y - 2x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 2x + 1$$

Quindi il grafico di questa isoclina è costituito dalla retta obliqua di equazione cartesiana $y = 2x + 1$.

b. Per trovare i punti di equilibrio dobbiamo trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy + x^3 = 0 \\ y - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

che significa trovare le intersezioni delle due isocline. Dalla prima equazione troviamo che

$$x = 0, \quad \textit{oppure} \quad y = -x^2$$

Se $x = 0$, sostituiamo nella seconda equazione e troviamo $y = 1$. Quindi un primo punto di equilibrio è $P_1 = (0, 1)$.
Se invece $y = x^2$, sostituiamo nella seconda equazione e troviamo

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -(x+1)^2 = 0$$

che ha per unica soluzione $x = -1$. Sostituendo nella prima equazione troviamo quindi un secondo punto di equilibrio che è $P_2 = (-1, -1)$.
Vi sono quindi due punti di equilibrio: P_1 e P_2. Per studiarne la stabilità usiamo il teorema di Hartmann-Grossmann. La dinamica del sistema è

$$f(x, y) = (xy + x^3, y - 2x - 1)$$

il cui Jacobiano è

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} y + 3x^2 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il Jacobiano nei punti di equilibrio è il seguente. In P_1

$$Df(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre in P_2

$$Df(-1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il Jacobiano in P_1 ha $\lambda = 1$ come unico autovalore (si vede immediatamente dato che la matrice è triangolare inferiore). Tale autovalore ha molteplicità geometrica 1 e algebrica 2. Essendo tale autovalore positivo il punto di equilibrio è instabile.

Il Jacobiano in P_2 ha determinante nullo (le due colonne sono linearmente dipendenti) e traccia positiva uguale a 3. Quindi i due autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$. Non possiamo usare il il teorema di Hartmann-Grossmann. Usando il Teorema 9.7 a pag 272 del libro:

J. Hale - H Kocak *Dynamics and Bifurcations0*, Springer - 1991.

si ottiene che il punto P_2 è instabile.

b. Il Jacobiano in P_1 ha $\lambda = 1$ come unico autovalore (si vede immediatamente dato che la matrice è triangolare inferiore). Tale autovalore ha molteplicità geometrica 1 e algebrica 2. Questo significa che il diagramma di fase (o diagramma delle orbite) del sistema linearizzato è quello di un nodo a una tangente (dove tale tangente è la retta generata dagli autovettori del Jacobiano, e quindi l'asse delle ordinate) instabile (perché l'unico autovettore è positivo).