LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2009/2010

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Soluzioni dell'esame scritto del 20/01/2010

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinare il nucleo di $\hat{L}$ al variare di a.

(3 punti) b. Fissato un opportuno valore di a, trovare almeno un vettore che non appartiene all'immagine di $\hat{L}$.

Soluzione:
a.
Il nucleo dell'operatore $\hat{L}$ si determina attraverso le soluzioni dell'equazione lineare omogenea: $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Le soluzioni di questa equazione determinano un sottospazio vettoriale la cui dimensione è pari a $n-\mathrm{Rg}(\hat{L})$, quindi bisogna anzitutto determinare il rango di $\hat{L}$. La difficoltà dell'esercizio è praticamente tutta qui. Anzitutto calcoliamo il determinante di $\hat{L}$ sviluppandolo rispetto alla seconda riga

$$\det(\hat{L}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Quindi il determinante è sempre 0 indipendentemente da a, per cui il rango è sicuramente minore di 3. Ora, selezionando la prima e la terza riga, e la prima e la seconda colonna si determinana una matrice $2x2$ con rango pari 2 ancora una volta indipendentemente da a:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ 0 & a & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Per cui, il rango è sempre pari a 2 e quindi il nucleo di $\hat{L}$ avrà dimensione $n-\mathrm{Rg}(\hat{L}) = 3 - 2 = 1$. Quindi ci occorre un unico vettore di base per determinare il nucleo di $\hat{L}$:

$$\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ 0 & a & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \to$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ x + y = -z \end{array} \right. \to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per cui $\mathbf{x}$ è la base del nucleo di $\hat{L}$, e tutti i vettori della forma $\alpha\mathbf{x}$ costituiscono il nucleo di $\hat{L}$.

b.
Perchè un vettore $\mathbf{b}$ non appartenga all'immagine di un operatore è sufficiente che il sistema $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ non abbia soluzioni. Perchè questo accada è necessario che i vettori che formano le colonne di $\hat{L}$ non riescano a generare $\mathbf{b}$, o, analogamente, che $\mathbf{b}$ sia linearmente indipendente dalle colonne di $\hat{L}$. Noi sappiamo già

che $\mathrm{Rg}(\hat{L}) = 2$ per cui sarà sufficiente determinare un $\mathbf{b}$ tale che $\mathrm{Rg}(\hat{L}) < \mathrm{Rg}(\hat{L}|\mathbf{b})$. Per cui studiamo la generica matrice $\hat{L}|\mathbf{b}$:

$$\hat{L}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & \alpha \\ 0 & a & 0 & | & \beta \\ 1 & 1 & 1 & | & \gamma \end{pmatrix}.$$

La prima e la terza colonna sono identiche, per cui sarà sufficiente determinare $\mathbf{b} = (\alpha, \beta, \gamma)$ in modo che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ a & 0 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \neq 0.$$

Fissando $a \neq 0$ sarà sufficiente porre $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$, mentre se fissiamo $a = 0$, allora bisognerà porre $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$.

2. Si consideri l'equazione alle differenze $\mathbf{x}_{n+1} = \hat{A}\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$.

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio e la loro la natura.

Soluzione:

a.

Determiniamo prima di tutto la decomposizione spettrale di $\hat{A}$:

$$\det(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda).$$

Quindi lo spettro di $\hat{A}$ contiene un autovalore doppio $\lambda = 0$ e un autovalore semplice $\lambda = 1$. Andiamo a calcolare la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ per stabilire se abbiamo a che fare con un operatore diagonalizzabile o se siamo nel caso di Jordan:

$$\hat{A}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{\text{-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nella ricerca degli autovettori associati a $\lambda = 0$ abbiamo determinato che $\mathrm{Rg}(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}}) = 2$, e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è pari ad uno: siamo nel caso di Jordan. Troviamo il primo autovettore generalizzato associato a $\lambda = 0$:

$$\hat{A}\mathbf{v}_0' = \mathbf{v}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{\text{-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_0' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

L'unico autovettore associato invece all'autovalore $\lambda = 1$ è:

$$(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{\text{-1}} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Completata la decomposizione spettrale, possiamo scrivere la matrice $\hat{A}$ rappresentandola nella base degli autovettori ed autovettori generalizzati $\mathbb{F} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0^{'}, \mathbf{v}_1)$ con

$$\hat{A}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi scriviamo la soluzione generale come

$$\mathbf{x}_n = \hat{A}^n \mathbf{x}_0 = \hat{U}\hat{A}_{\mathbb{F}}^n \hat{U}^{-1}\mathbf{x}_0 = \left(\begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_0 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_0^{'} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{v}_1 \\ \\ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

ovvero $\mathbf{x}_n = c_3 \mathbf{v}_1$. È interessante notare come, nella soluzione generale, non compaiano gli autovettori (semplice e generalizzato) associati a $\lambda = 0$. Per cui, per determinare la soluzione generale, non era importante calcolarli.

b.
I punti di equilibrio di un sistema di equazioni alle differenze $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ si calcolano ponendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, che nel nostro caso diventa $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Questa equazione ammette sempre la soluzione banale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ed ammette soluzioni non banali se $\det(\hat{A} - \hat{\mathbb{I}}) = 0$, ovvero se la matrice $\hat{A}$ ammette $\lambda = 1$ come autovalore. Essendo proprio questo il caso, ci saranno infiniti punti di equilibrio che sono tutti i punti del sottospazio invariante associato all'autovalore $\lambda = 1$, ossia $\mathbf{x}_E = \alpha \mathbf{v}_1$. Tali punti di equilibrio saranno stabili in quanto tutti gli autovalori sono a modulo minore o uguale a 1:

$$\max_{\lambda \in \sigma(\hat{A})} |\lambda| \leq 1$$

.

3. Data la funzione $f(x) = ax^2(M-x)$, con $a > 0, M > 0$, si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Trovare i punti di equilibrio e disegnare il diagramma di fase.

(2 punti) c. Discutere, motivando la risposta, la stabilità dei punti di equilibrio e la monotonia delle soluzioni.

(1 punti) d. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale.

Soluzione:

a. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2(M-x)$, è continua e derivabile con derivata continua in quanto è un polinomio. Perciò, grazie al teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.
b. I punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ e quindi sono due: $x = 0$ e $x = M$. Per disegnare il diagramma di fase occorre fare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$ da cui risultino gli intervalli in cui essa è positiva e quelli in cui è negativa.
   Innanzitutto è immediato vedere che, essendo il termine di grado massimo $-ax^3$,
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
   Dato che $f(x) = aMx^2 - ax^3$ (conviene scriverla come somma perché così la derivata si calcola meglio), si ha
   $$f'(x) = 2aMx - 3ax^2 = ax(2M - 3x).$$
   Quindi

- $f'(x) > 0$ per $x \in (0, 2M/3)$;
- $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (2M/3, +\infty)$;
- $f'(x) = 0$ per $x = 0, 2M/3$.

Ne segue che $x = 0$ è punto di minimo locale $x = 2M/3$ è punto di massimo locale. Quindi

- $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, M)$;
- $f(x) < 0$ per $x \in (M, +\infty)$;
- $f(x) = 0$ per $x = 0, M$.

c. Usando i dati del punto b e il fatto che le traiettorie non si possono incrociare, grazie al teorema di esistenza e unicità locale, vediamo che

- per $x_0 \in (-\infty, 0)$ la soluzione $x(t; 0, x_0)$ resta in $(-\infty, 0)$ per ogni $t \geq 0$ ed è strettamente crescente;
- per $x_0 \in (0, M)$ la soluzione $x(t; 0, x_0)$ resta in $(0, M)$ per ogni $t \geq 0$ ed è strettamente crescente;
- per $x_0 \in (M, +\infty)$ la soluzione $x(t; 0, x_0)$ resta in $(M, +\infty)$ per ogni $t \geq 0$ ed è strettamente decrescente;

il punto di equilibrio $x = 0$ è instabile. Più precisamente è asintoticamente stabile da sinistra (con $BA(0) = (-\infty, 0)$) e instabile da destra. Questo si vede con il diagramma di fase. In questo caso il Teorema di Hartmann-Grossmann non dice nulla riguardo alla stabilità in quanto $f'(0) = 0$. Inoltre il punto di equilibrio $x = M$ è stabile. Questo si vede con il Teorema di Hartmann-Grossmann dato che $f'(M) = -aM^2 < 0$. Inoltre dal diagramma di fase vediamo che $BA(M) = (0, +\infty)$.

d. La soluzione locale è globale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Per dimostrarlo basta far vedere che la soluzione locale è sempre limitata (usiamo cioé il cosiddetto teorema di prolungamento).

- per $x_0 \in (-\infty, 0)$ la soluzione $x(t; 0, x_0)$ resta in $[x_0, 0)$ dato che è strettamente crescente e dato che $x = 0$ è un punto di equilibrio;
- per $x_0 \in (0, M)$ la soluzione $x(t; 0, x_0)$ resta in $(0, M)$ per ogni $t \geq 0$ dato che $x = 0$ e $x = M$ sono punti di equilibrio;
- per $x_0 \in (M, +\infty)$ la soluzione $x(t; 0, x_0)$ resta in $(M, x_0]$ dato che è strettamente decrescente e dato che $x = 0$ è un punto di equilibrio;

4. Data la funzione $f(x) = x \log x$, considerare il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$.

(2 punti) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 > 0$. Trovare i punti di equilibrio.

(2 punti) b. Trovare, motivando la risposta, la soluzione locale per ogni $x_0 > 0$.

(2 punti) c. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale e se i punti di equilibrio sono stabili.

Soluzione:

a. La funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \log x)$, è continua e derivabile con derivata continua in quanto è un prodotto di funzioni elementari. Perciò, grazie al teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$. I punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ e quindi è uno solo: $x = 1$.

b. Per calcolare la soluzione uso che l'equazione è e variabili separabili. Sia $x_0 > 0$, $x_0 \neq 1$. Allora la soluzione che esce da x_0 (che chiamiamo per brevità $x(t)$) soddisfa, almeno per t in un intorno di 0, $x(t) > 0$ e $x(t) \neq 1$. Possiamo allora scrivere, per tali t:

$$\frac{x'(t)}{x(t) \log x(t)} = 1$$

e, integrando su $[0, t]$

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{x(s) \log x(s)} ds = t$$

Cambiando variabile nel primo integrale, ponendo $z = x(s)$, si ha

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{z \log z} dz = t$$

Da cui, usando che, per ogni $z > 0$, $z \neq 1$,

$$D \log |\log z| = \frac{1}{z \log z}$$

si ha

$$\log |\log x(t)| - \log |\log x_0| = t$$

E quindi:

$$\log \frac{|\log x(t)|}{|\log x_0|} = t$$

Ora, se $x_0 \in (0,1)$, anche $x(t) \in (0,1)$ per il teorema di esistenza e unicità locale. Ugualmente, se $x_0 \in (1,+\infty)$, anche $x(t) \in (1,+\infty)$. Ne segue che

$$\frac{|\log x(t)|}{|\log x_0|} = \frac{\log x(t)}{\log x_0}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\log \frac{\log x(t)}{\log x_0} = t$$

Da cui, prendendo l'esponenziale di entrambi i membri:

$$\frac{\log x(t)}{\log x_0} = e^t \quad \Longrightarrow \quad \log x(t) = (\log x_0)e^t$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = e^{(\log x_0)e^t} = \left[e^{\log x_0}\right]^{e^t} = x_0^{e^t}$$

Notare che, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la proprietà delle potenze:

$$e^{ab} = (e^a)^b$$

Alcuni hanno sbagliato proprio questo passaggio: ATTENZIONE!

c. La soluzione trovata nel punto precedente è globale in quanto è definita per ogni $t \geq 0$. Un buon esercizio è verificare che essa è soluzione sostituendola direttamente nell'equazione differenziale.
Infine l'unico punto di equilibrio $x = 1$ è instabile dato che in esso $f'(1) > 0$. Infatti $f'(x) = \log x + 1$ per ogni $x > 0$.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y^2(t) \\ y'(t) = e^{x(t)} + y^2(t) - 1 \end{cases}$$

(3 punti) a. Trovare i punti di equilibrio (suggerimento: la ricerca dei punti di equilibrio si riduce allo studio di un'oppurtuna funzione di una singola variabile).

(3 punti) b. Discutere la loro stabilità.

Soluzione:

a. I punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} &x - y^2 = 0 \\ &e^x + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Sostituendo la prima nella seconda ottengo

$$e^x + x - 1 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono gli zeri della funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x - 1$. Essa ha un unico zero nel punto $x = 0$. Infatti

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

e

$$g'(x) = e^x + 1 > 0$$

Quindi g è strettamente crescente e per il teorema di esistenza e unicità degli zeri, ha un unico zero su $\mathbb{R}$. Dato che $g(0) = 0$ l'unico zero è il punto $x = 0$.

Dalla prima equazione segue che $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Quindi l'unico punto di equilibrio del sistema è $(0, 0)$.

b. La funzione $f(x, y) = (x - y^2, e^x + y^2 - 1)$ ha come Jacobiano la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y \\ e^x & 2y \end{pmatrix}$$

Tale matrice nell'unico punto di equilibrio $(0, 0)$ vale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice non invertibile (ha una colonna nulla!). Quindi non si può applicare il Teorema di Hartmann-Grossmann. Tuttavia i suoi autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ (lo vediamo senza fare calcoli in quanto la matrice è triangolare superiore). Usando allora il Teorema 9.7 a pag 272 del libro:

J. Hale - H Kocak *Dynamics and Bifurcations0*, Springer - 1991.

si ottiene che il punto $(0, 0)$ è instabile.