Soluzione del compito del 12 Gennaio 2009

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, con $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ a+1 & -1 \end{pmatrix}$,

   a. determinare i valori di a per cui $\hat{L}$ non possegga sottospazi invarianti reali.
   Soluzione:
   Un'operatore non possiede sottospazi invarianti reali se tutti i suoi autovalori sono complessi. Occorre quindi calcolare gli autovalori di $\hat{L}$:

$$\det(\hat{L} - \lambda\hat{\jmath}) = \det \begin{pmatrix} 1+2a-\lambda & a \\ a+1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2a\lambda - a^2 - 3a - 1\,.$$

   Ora, perché gli autovalori siano complessi coniugati, dobbiamo imporre che il discriminante di questa equazione di secondo grado sia minore di zero:

$$\Delta = (2a)^2 - 4(-a^2 - 3a - 1) = 8a^2 + 12a + 4$$

$$\Delta < 0 \to 2a^2+3a+1 < 0 \to 2a^2+3a+1 = 0 \to a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \to a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = -2\,.$$

   Quindi $\Delta < 0$ se $-2 < a < -\frac{1}{2}$.

   b. Fissando un valore di a tra quelli determinati al punto precedente, calcolare $\hat{L}^t$, con $t \in \mathbb{N}$.
   Soluzione:
   Scegliamo $a = -\frac{2}{3}$. Allora:

$$\begin{pmatrix} 1 + -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} + 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}\,.$$

   Dobbiamo quindi calcolare $\hat{L}^t$ effettuando la decomposizione spettrale di $\hat{L}$.

$$\det(\hat{L} - \lambda\hat{\jmath}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + \frac{5}{9} = 0\,.$$

   Da cui si ottiene $\lambda = -\frac{2}{3} \pm \frac{i}{3}$. Calcoliamo gli autovettori complessi coniugati:

$$\left(\hat{L} - \left(-\frac{2}{3} + \frac{i}{3}\right)\hat{\jmath}\right)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3} + \frac{i}{3}\right) & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 - \left(-\frac{2}{3} + \frac{i}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{i}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \frac{i}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = (1+i)y \to \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

   avendo risolto il sistema omogeneo rispetto al minore non nullo relativo all'elemento di sud-est della matrice. Con l'autovettore complesso $\mathbf{v}$ costruiamo la matrice del cambiamento di base:

$$\hat{U} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre la rappresentazione complessa della matrice $\hat{L}$ è pari a:

$$\hat{L}_c = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dove, se $\lambda = a + ib = -\frac{2}{3} \pm \frac{i}{3}$:

$$\begin{cases} \rho & = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \theta & = \arctan\frac{b}{a} + \pi = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi \end{cases}$$

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per costruire $\hat{L}^t$:

$$\hat{L}^t = \hat{U}\hat{L}_c^t\hat{U}^-1 == \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rho^t \begin{pmatrix} \cos\theta t & \sin\theta t \\ -\sin\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Sia $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Data la seguente equazione alle differenze: $x_{t+2} - 4x_t = t$

   a. determinarne la soluzione generale.
   Soluzione:
   Abbiamo a che fare con un'equazione alle differenze lineare a coefficienti costanti non omogenea. Per cui risolviamo prima l'equazione omogenea associata e successivamente, con il metodo delle somiglianze, troviamo una soluzione particolare.
   Il polinomio caratteristico associato all'omogenea è

$$\lambda^2 - 4 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 2$$

   per cui tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono

$$x_t^o = c_1(2)^t + c_2(-2)^t .$$

   Il termine di non omogeneità, t, è associato ad un autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica pari a 2. Visto che non vi è degenerazione, la soluzione particolare che cerchiamo sarà della forma $x_t^p = k_1 t + k_2$. La sostituiamo nell'equazione, ottenendo

$$k_1(t+2) + k_2 - 4(k_1 t + k_2) = t \rightarrow k_1 t + 2k_1 + k_2 - 4k_1 t - 4k_2 = t$$

   la cui soluzione ci porta al sistema:

$$\begin{cases} k_1 - 4k_1 & = 1 \\ 2k_1 + k_2 - 4k_2 & = 0 \end{cases} = \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{3} \\ \\ k_2 = -\frac{2}{9} \end{cases} .$$

   Per cui, la soluzione generale sarà:

$$x_t = x_t^o + x_t^p = c_1(2)^t + c_2(-2)^t - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9} .$$

b. Trovare la soluzione passante per $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$.

Soluzione:

Bisogna imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} c_1(2) + c_2(-2) - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = 1 \\ c_1(2)^2 + c_2(-2)^2 - \frac{1}{3}2 - \frac{2}{9} = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2c_1 - 2c_2 = \frac{14}{9} \\ 4c_1 + 4c_2 = \frac{8}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{5}{18} \end{cases}$$

Per cui la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x_{t+2} - 4x_t = t \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

è: $x_t = \frac{1}{2}2^t - \frac{5}{18}(-2)^t - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}$

3. Sia $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione differenziale: $x' = 1 - \dfrac{x+1}{x^3}$.

a. Determinarne i punti di equilibrio dimostrandone l'esistenza.

Soluzione:

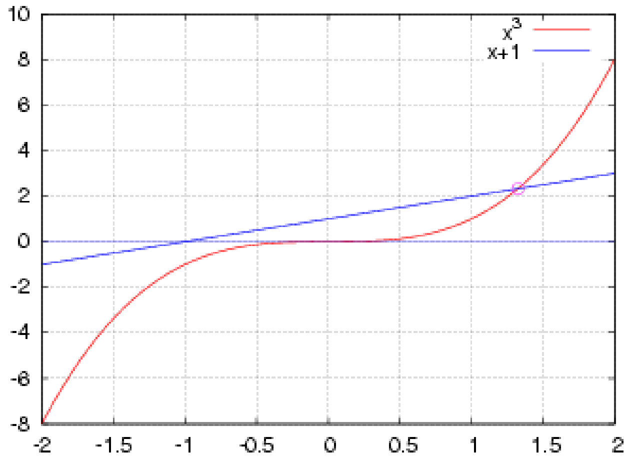
Qualche manipolazione algebrica sulla dinamica porta all'equazione:

$$f(x) = 1 - \frac{x+1}{x^3} = \frac{x^3 - x - 1}{x^3}$$

e quindi, la ricerca dei punti di equilibrio porta alla ricerca degli zeri dell'equazione:

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x - 1 = 0\,.$$

Visto che con metodi standard non è possibile trovare gli zeri dell'equazione, è conveniente iniziare ad effettuare uno studio grafico delle funzioni x^3 e $x+1$ le cui intersezioni determinano i punti di equilibrio.



Dal grafico è abbastanza evidente la presenza di un unico punto di equilibrio. Dimostriamolo analiticamente studiando la dinamica $f(x)$:

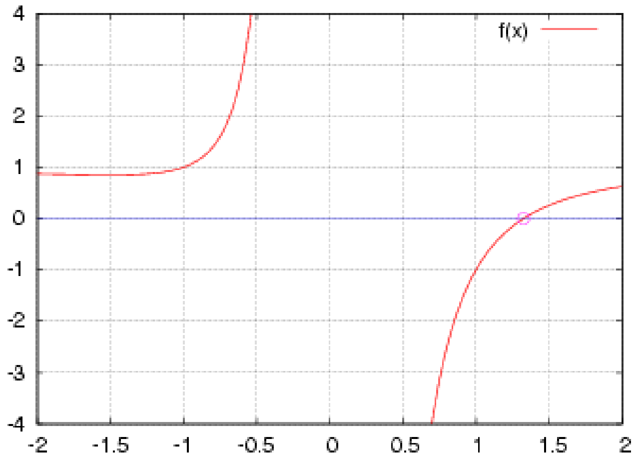
$$\lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{x+1}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} 1 - \frac{x+1}{x^3} = \mp\infty$$

Quindi la $f(x)$ ha due asintoti, uno verticale a $x = 0$ e uno orizzontale a $y = 1$. Calcoliamo la derivata della dinamica:

$$f'(x) = -\frac{x^3 - 3x^2(x+1)}{x^6} = -\frac{-2x^3 - 3x^2}{x^6} = \frac{2x+3}{x^4}$$

Tale derivata è positiva per $x > -\frac{3}{2}$ e negativa se $x < -\frac{3}{2}$. Quindi il minimo locale si troverà in $x = -\frac{3}{2}$ dove la funzione vale $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{23}{27}$. Ricapitolando, la funzione parte da $x \to -\infty$ dove vale 1 e decresce fino a raggiungere il valore di $\frac{23}{27}$ in $x = \frac{3}{2}$. Successivamente cresce fino a $+\infty$ quando $x \to 0^-$. Per cui se $x < 0$ la funzione è sempre positiva e non ci sono intersezioni con l'asse delle x. A partire da $x \to 0^-$ la funzione vale $-\infty$ e cresce monotonamente fino a raggiungere il valore 1 per $x \to +\infty$. È quindi dimostrata l'esistenza di un unico punto di equilibrio.



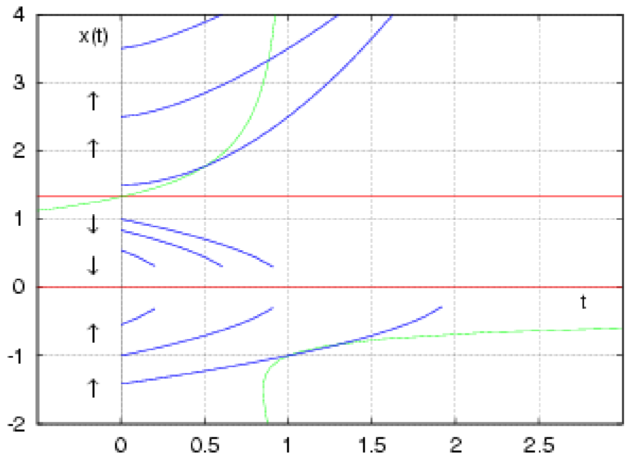
b. Disegnare il diagramma di fase (qualitativo).

Soluzione:

Il segno della $f(x)$ determina l'evoluzione della dinamica. Dallo studio effettuato al punto precedente si ha che

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{se} \quad -\infty < x < 0^- \\ f(x) < 0 & \text{se} \quad 0^+ < x < x_0 \\ f(x) > 0 & \text{se} \quad x_0 < x < +\infty \end{cases}$$

L'unica considerazione riguarda le traiettorie che tendono verso lo stato $x = 0$. Visto che in $x = 0$ la dinamica non è definita ci aspettiamo che le traiettorie che tendono verso lo zero ci vadano in maniera non graduale.



c. Discutere esistenza, unicità ed esistenza globale delle soluzioni.
Soluzione:
Per quanto riguarda l'esistenza, dobbiamo verificare la continuità della $f(x)$. Essendo non continua solo in $x = 0$, per qualsiasi condizione iniziale appartenente ad ogni intervallo aperto che non comprende $x = 0$, è garantita l'esistenza della soluzione.
Visto che anche la derivata della $f(x)$ non è continua solo in $x = 0$ allora per le medesime condizioni iniziali scelte per lo studio dell'esistenza è garantita anche l'unicità della soluzione.
L'esistenza globale invece non è garantita in quanto la derivata della dinamica non è globalmente limitata.

4. Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

a. determinarne la soluzione generale;
Soluzione:
Autovalori di $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$. Autovettori: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ relativo a $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ relativo a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ relativo a $\lambda_3 = \sqrt{2}$. Soluzione generale:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{v}|\mathbf{u}|\mathbf{w}) \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$
$$= c_1 e^{-\sqrt{2}t}\mathbf{v} + c_2 e^{-t}\mathbf{u} + c_3 e^{\sqrt{2}t}\mathbf{w}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b. determinarne i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

Soluzione:
Poiché $\det \hat{A} = 2 \neq 0$, la matrice è invertibile, pertanto l'origine $(0, 0, 0)$ è l'unico punto di equilibrio del sistema. Dato che

$$s(\hat{A}) = \sup\{\mathrm{Re}(\lambda) : \ \lambda \text{ autovalore di } \hat{A}\} = \sup\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\} = \sqrt{2} > 0,$$

l'origine è un punto di equilibrio instabile.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x' = \ln\left(y^2\right) \\ y' = xy - x^3. \end{cases}$$

a. Determinare le equazioni delle isocline e darne una rappresentazione grafica.

Soluzione:
Innanzitutto, per l'esistenza del logaritmo, si ha $y^2 > 0$, per ogni $y \in \mathbb{R}$, e questo è vero per $y \neq 0$. Equazioni delle isocline:

$$\begin{cases} \ln\left(y^2\right) = 0 \\ xy - x^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 1 \\ x(y - x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0,\ y = x^2. \end{cases}$$

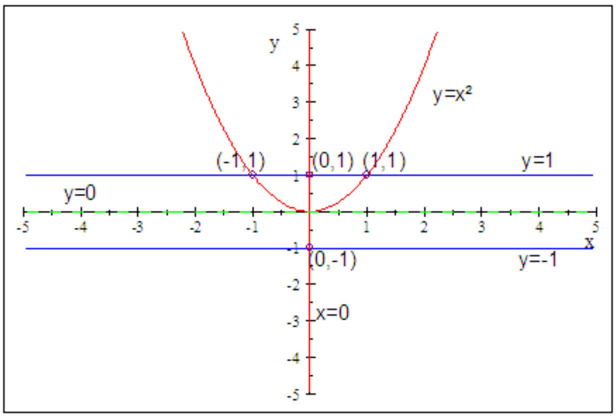


Figura 1: Isocline e punti di equilibrio.

b. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

Soluzione:
Osservando il grafico, possiamo già intuire quali siano i punti di equilibrio. Infatti corrispondono alle intersezioni delle isocline a tangente verticale con quelle a tangente orizzontale. Analiticamente si ottengono andando a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0,\ y = x^2. \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$. Per studiarne la stabilità, utilizziamo il metodo di linearizzazione. Scriviamo la matrice Jacobiana associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{y} \\ y - 3x^2 & x \end{pmatrix}.$$

Valutiamola nei punti di equilibrio:

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autovalori: $\pm\sqrt{2}$, $\det J(0,1) = -2 < 0$. Il punto di equilibrio $(0,1)$ è un colle instabile. Calcoliamo gli autovettori: l'autovettore relativo all'autovalore negativo individua la varietà lineare stabile ed è $\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; l'autovettore relativo all'autovalore positivo individua la varietà lineare instabile ed è $\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$J(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autovalori: $\pm\sqrt{2}$, $\det J(0,1) = -2 < 0$. Il punto di equilibrio $(0,1)$ è un colle instabile. Calcoliamo gli autovettori: l'autovettore relativo all'autovalore negativo individua la varietà lineare stabile ed è $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; l'autovettore relativo all'autovalore positivo individua la varietà lineare instabile ed è $\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autovalori: $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$, $\mathrm{tr}J(0,1) = 1 > 0$. Il punto di equilibrio $(1,1)$ è un fuoco instabile.

$$J(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Autovalori: $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$, $\mathrm{tr}J(0,1) = -1 < 0$. Il punto di equilibrio $(1,1)$ è un fuoco localmente asintoticamente stabile.

c. Tracciare il diagramma di fase.

Soluzione:
Diagramma di fase. Sappiamo che le isocline dividono il campo vettoriale in settori. Etichettiamo i vari settori, prendiamo un punto in ogni settore e calcoliamone il vettore velocità. In questo modo si riesce a delineare completamente il campo vettoriale (si veda la Figura 2).

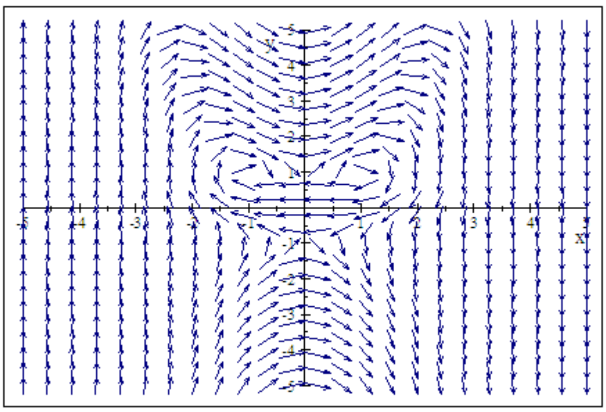


Figura 2: Campo vettoriale.

È semplice quindi intuire e completare l'esercizio disegnando l'andamento delle traiettorie.