Soluzione del compito del 22 luglio 2008

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la sua base canonica $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$.
Definiamo su di esso una nuova base $\mathbb{F} = (\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \mathbf{f}_3)$ con

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 , \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 , \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 .$$

(3 punti) a. Se la rappresentazione dell'operatore $\hat{L}$ nella base $\mathbb{F}$ è $\hat{L}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
qual'è la sua rappresentazione nella base $\mathbb{E}$?

(3 punti) b. La rappresentazione dell'operatore $\hat{L}$ nella base $\mathbb{F}$ ha un autovalore pari a zero. Dopo averne calcolato l'autovettore associato, determinare come cambiano autovalore e autovettore se si rappresenta $\hat{L}$ nella base canonica.

Soluzione 0.1. *La matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\mathbb{E}$ alla nuova base $\mathbb{F}$ è*

$$\hat{U} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si calcola facilmente l'inversa di $\hat{U}$:

$$\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

a. La legge del cambiamento di rappresentazione per gli operatori lineari dovuta ad un cambiamento di base è

$$\hat{L}_{\mathbb{F}} = \hat{U}^{-1} \hat{L}_{\mathbb{E}} \hat{U}$$

per cui per determinare, $\hat{L}_{\mathbb{E}}$ dobbiamo calcolare

$$\hat{L}_{\mathbb{E}} = \hat{U} \hat{L}_{\mathbb{F}} \hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

b. La presenza di un autovalore nullo per l'operatore $\hat{L}_{\mathbb{F}}$ è confermata dal fatto che $\det \hat{L}_{\mathbb{F}} = 0$. *Troviamo l'autovettore associato:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \textit{se} \qquad \mathbf{v}^0_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di operatori lineari non dipendono dalla base in cui si rappresenta l'operatore. Infatti

$$\det(\hat{L}_{\mathbb{F}} - \lambda \hat{\jmath}) = \det(\hat{U}^{-1} \hat{L}_{\mathbb{E}} \hat{U} - \lambda \hat{\jmath}) = \det(\hat{U}^{-1} \hat{L}_{\mathbb{E}} \hat{U} - \lambda \hat{U}^{-1} \hat{U}) =$$
$$\det(\hat{U}^{-1} (\hat{L}_{\mathbb{E}} - \lambda \hat{\jmath}) \hat{U}) = \det(\hat{U}^{-1}) \det(\hat{L}_{\mathbb{E}} - \lambda \hat{\jmath}) \det(\hat{U}) = \det(\hat{L}_{\mathbb{E}} - \lambda \hat{\jmath})$$

Mentre gli autovettori, come vettori, dipendono dalla base e si trasformano come:

$$\mathbf{v}^0_{\mathbb{E}} = \hat{U} \mathbf{v}^0_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si può infine verificare che

$$\hat{L}_{\mathbb{E}}\mathbf{v}^0_{\mathbb{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

2. Data l'equazione alle differenze lineare e omogenea in $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$,

(1 punto) a. determinare per quali valori di a le soluzioni del sistema sono combinazioni lineari di funzioni trigonometriche;

(3 punti) b. per un valore di a a scelta tra quelli determinati al punto precedente, calcolare la soluzione generale del sistema;

(2 punti) c. per quello stesso valore, calcolare la soluzione particolare con condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione 0.2. *La soluzione dell'esercizio prevede la ricerca di soluzioni complesse dell'equazione alle differenze.*

a. *Se gli autovalori della matrice associata al sistema sono complessi coniugati, allora la soluzione generale del sistema sarà una combinazione lineare di funzioni trigonometriche:*

$$\det(\hat{A} - \lambda\hat{\mathfrak{I}}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & a \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - a = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+a}$$

Quindi, per $a < -1$ si hanno soluzioni complesse coniugate.

b. *Un valore di a per il quale gli autovalori sono abbastanza semplici è $a = -2$, per il quale*

$$\lambda = 1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Per il calcolo degli autovettori bisogna risolvere

$$(\hat{A} - (1+i)\hat{\mathfrak{I}})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Osservando che la matrice è a determinante pari a zero, e scegliendo un elemento della seconda riga come minore non nullo si ha

$$x + (1-i)y = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_a + i\mathbf{v}_b$$

Con i vettori $\mathbf{v}_a$ e $\mathbf{v}_b$ costruiamo la matrice del cambiamento di base $\hat{U} = ((\mathbf{v}_a)(\mathbf{v}_b))$ e possiamo quindi scrivere la soluzione generale come

$$\mathbf{x}_n = \hat{U}\hat{A}_c^n\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^n \cos n\frac{\pi}{4} & \sqrt{2}^n \sin n\frac{\pi}{4} \\ -\sqrt{2}^n \sin n\frac{\pi}{4} & \sqrt{2}^n \cos n\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

c. *Per determinare le costanti c_1 e c_2 relative alla condizione iniziale basta osservare che c_1 e c_2 sono la rappresentazione della condizione iniziale nella base $(\mathbf{v}_a\ \mathbf{v}_b)$ e quindi*

$$\mathbf{c} = \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione alle differenze:

$$x(t+1) = (a-1)x(t) - ax^2(t),$$

con $a > 0$, parametro reale.

(3 punti) a. Indicata con f la dinamica, determinare l'iterata seconda f^2.

(3 punti) b. Discutere l'esistenza di orbite di periodo 2 al variare di a.

Soluzione 0.3.

a. La dinamica è data dall'applicazione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *con*

$$f(t,x) = f(x) = (a-1)x - ax^2, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Calcoliamo l'iterata seconda f^2:

$$\begin{aligned} f^2(x) = f(f(x)) &= f\left((a-1)x - ax^2\right) \\ &= -a^3x^4 + 2a^2(a-1)x^3 - a^2(a-1)x^2 + (a-1)^2x, \\ &= x\left[-a^3x^3 + 2a^2(a-1)x^2 - a^2(a-1)x + (a-1)^2\right], \quad a > 0. \end{aligned}$$

b. Per determinare le eventuali orbite di periodo due, occorre calcolare i punti fissi dell'iterata seconda che non sono punti fissi della dinamica. Calcoliamo quindi i punti fissi di f:

$$f(x) = x \iff (a-1)x - ax^2 = x \iff ax^2 + (2-a) = 0 \iff x\,(ax + 2 - a) = 0,$$

pertanto

$$x = 0 \quad e \quad x = \frac{a-2}{a}, \quad se\ a \neq 2.$$

Studiamo ora i punti fissi di f^2, *i.e. consideriamo* $f^2(x) - x = 0$, *ovvero andiamo a studiare le radici dell'equazione*

$$-ax\left[a^2x^3 - 2a(a-1)x^2 + a(a-1)x - a + 2\right] = 0.$$

- *Se* $a = 2$, *l'unico punto fisso di* f^2 *è* 0 *che è anche punto fisso di* f, *quindi non esistono orbite di periodo 2.*
- *Se* $a \neq 2$, *si ha*

$$f^2(x) - x = ax\left(x - \frac{a-2}{a}\right)\left(ax^2 - ax + 1\right) = 0.$$

Studiando il $\Delta = a^2 - 4a$ *dell'equazione di secondo grado* $ax^2 - ax + 1 = 0$, *con* $a > 0$, *vediamo che:*

$$\Delta = 0 \quad se\ a = 4.$$

Se $a = 4$, *abbiamo* $f^2(x) - x = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$. *Non si trovano altri punti fissi oltre* $x = 0$ *e* $x = \frac{1}{2}$ *che sono i punti fissi di* f. *Pertanto non esistono orbite di periodo 2.*

$$\Delta > 0, \quad se\ a > 4.$$

In questo caso otteniamo altri due punti fissi oltre quelli di f, *che corrispondono ad un'orbita di periodo 2.*

$$\Delta < 0, \quad se\ 0 < a < 4$$

Non esistono orbite di periodo 2. (Il caso particolare $a = 2$ *che abbiamo studiato precedentemente rientra in questo caso più generale).*
Ad esempio, per $a = 5$ *si ha* $f^2(x) - x = 5x\left(x - \frac{3}{5}\right)(5x^2 - 5x + 1)$. *Sappiamo che per* $a = 5$ *esistono orbite di periodo 2. Infatti osserviamo che oltre alle intersezioni* $(0,0)$ *e* $(3/5, 0)$ *con l'asse delle ascisse,* $f^2(x) - x$ *incontra l'asse delle ascisse in altri due punti soluzioni di* $5x^2 - 5x + 1 = 0$. *Si veda la figura 1.*

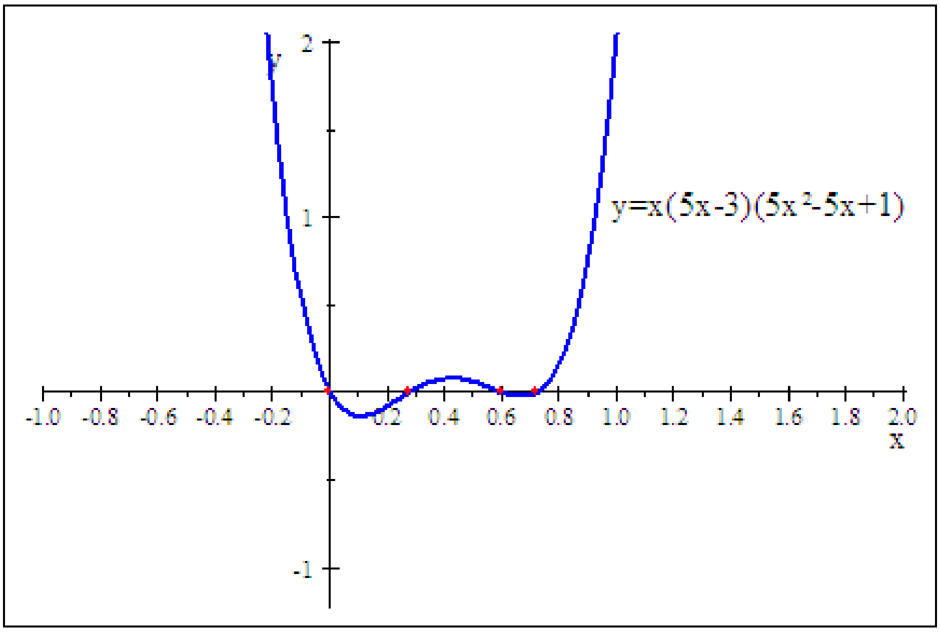


Figura 1: Grafico di $f^2(x) - x$ nel caso $a = 5$.

4. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$x'(t) = x^2(t) - \cos x(t).$$

(4 punti) a. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

(2 punti) b. Tracciare il diagramma di fase.

Soluzione 0.4. *a. Per la ricerca dei punti di equilibrio delle equazioni differenziali bisogna porre*

$$f(x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - \cos(x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^2 = \cos(x)\,.$$

Questa equazione non può essere risolta con il calcolo algebrico semplice (perché composta dalla differenza di una funzione algebrica e di una funzione trascendente) e quindi andrà effettuato uno studio di funzione. $g(x) = x^2$ *e* $h(x) = \cos(x)$ *sono entrambe funzioni pari (ossia* $f(-x) = f(x)$*) per cui possiamo restringere la ricerca dei punti di equilibrio al dominio* $[0, \infty)$*. Valgono inoltre le seguenti considerazioni:*

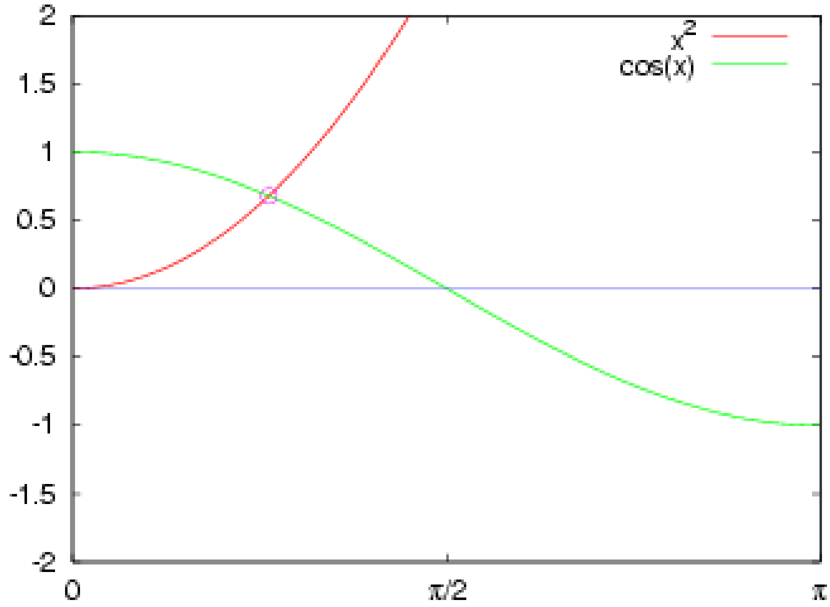
(a) Nel punto $x = 0$ *si ha* $g(0) < h(0)$ *(infatti* $g(0) = 0$ *e* $h(0) = 1$*).*

(b) La funzione $g(x)$ *nel dominio in esame è sempre crescente (*$g'(x) = 2x \geq 0$*).*

(c) La funzione $h(x)$ *nel dominio* $[0, \pi]$ *è sempre decrescente (*$h'(x) = -\sin(x) \leq 0$*).*

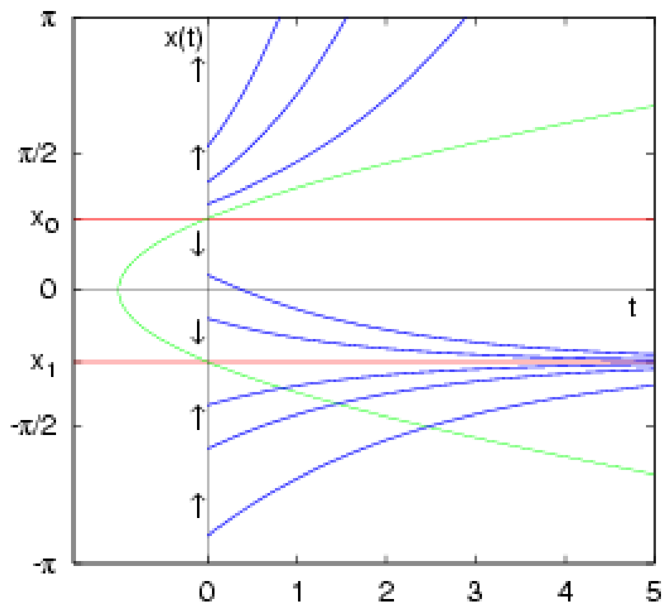
(d) Nel punto $x = \pi$ *si ha* $g(\pi) > h(\pi)$ *(infatti* $g(\pi) = \pi^2 \simeq 9.86$ *e* $h(\pi) = -1$*).*

Quindi, partendo dal punto $x = 0$ *per cui* $g(0) < h(0)$ *si arriva a* $x = \pi$ *con* $g(\pi) > h(\pi)$ *con le funzioni* $g(x)$ *e* $h(x)$ *monotone nel dominio* $[0, \pi]$*. Questo è sufficiente a dimostrare che tra* 0 *e* π *esiste un unico punto di equilibrio* $0 < x_0 < \pi$*. Per quanto riguarda i punti* $x > \pi$ *si ha che* $g(x)$ *sarà sempre maggiore di* 1 *(valore massimo raggiungibile da* $h(x) = \cos(x)$*) e quindi non potranno esserci altri punti di equilibrio. Poi, visto che le funzioni sono pari, esisterà un altro punto* $x_1 = -x_0$ *con* $-\pi < x_1 < 0$ *in cui* $g(x_1) = h(x_1)$*. Questa affermazione completa la dimostrazione dell'esistenza di due soli punti di equilibrio* *per l'equazione* $x' = x^2 - \cos(x)$.



Per lo studio di stabilità basterà considerare che si ha $f'(x_0) = g'(x_0) - h'(x_0) > 0$ *per le osservazioni nei punti b e c. E, analogamente, si ha* $f'(x_1) = g'(x_1) - h'(x_1) < 0$. *Per cui* x_0 *è un punto di equilibrio instabile mentre* x_1 *è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

b. Per lo studio del diagramma di fase, sfruttando lo studio di funzione effettuato nel punto precedente si ha $f(x) < 0$ *se* $x_1 < x < x_0$ *mentre* $f(x) > 0$ *se* $x < x_1$ *e se* $x > x_0$. *Per cui è semplice verificare il seguente comportamento:*



5. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x'(t) = 8\,(x(t) - 1)^2\,(y(t) - 1) - y^2(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y^2(t) - 1. \end{cases}$$

(4 punti) a. Determinare i punti di equilibrio, studiarne la stabilità e la natura.

(2 punti) b. Determinare le isocline e tracciare il diagramma di fase.

Soluzione 0.5.

a. *Per calcolare i punti di equilibrio, risolviamo il sistema:*

$$\begin{cases} 8(x-1)^2(y-1) - y^2 + y = 0 \\ x + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

e otteniamo: $(0,1)$, $(1,0)$, $(3/4, 1/2)$. *Per studiarne la stabilità e la natura utilizziamo il metodo di linearizzazione. Calcoliamo quindi la matrice Jacobiana:*

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 16(x-1)(y-1) & 8(x-1)^2 - 2y + 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

e valutiamola nei punti di equilibrio:

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det J(0,1) = -7 \neq 0$, *il punto di equilibrio è non degenere e possiamo applicare quindi il metodo di linearizzazione. Calcolando gli autovalori della matrice otteniamo* $1 \pm 2\sqrt{2}$, *ovvero un autovalore positivo ed uno negativo. Allora il punto è instabile. Inoltre l'origine risulta un colle per il sistema linearizzato, pertanto* $(1,0)$ *è un colle per il sistema di partenza.*

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det J(1,0) = -1 \neq 0$, *il punto di equilibrio è non degenere e possiamo applicare quindi il metodo di linearizzazione. Calcolando gli autovalori della matrice otteniamo* ± 1, *ovvero un autovalore positivo ed uno negativo. Ragionando come per il punto precedente si ottiene che* $(1,0)$ *è un colle (instabile).*

$$J(3/4, 1/2) = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det J(3/4, 1/2) = 3/2 \neq 0$, *il punto di equilibrio è non degenere e possiamo applicare quindi il metodo di linearizzazione. Calcolando gli autovalori della matrice otteniamo ,* $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ *ovvero due autovalori positivi.Allora il punto è instabile.Inoltre poiché il determinante della matrice è positivo si ha che l'origine è un nodo a due tangenti per il sistema linearizzato. Quindi si ottiene che* $(3/4, 1/2)$ *è un nodo a due tangenti instabile per il sistema di partenza.*

b. *Equazioni isocline a tangente verticale:*

$$y = 1, \qquad y = 8(x-1)^2.$$

Equazione isoclina a tangente orizzontale:

$$x = 1 - y^2.$$

Si veda la figura 2.

Disegnamo quindi il campo vettoriale (figura 3) che fornisce un'idea dell'andamento delle traiettorie, così da poter infine tracciare il diagramma di fase. Lo studio della natura dei punti di equilibrio fornisce informazioni in più sull'andamento delle traiettorie negli intorni dei punti di equilibrio e quindi un valido aiuto per il completamento del diagramma di fase.

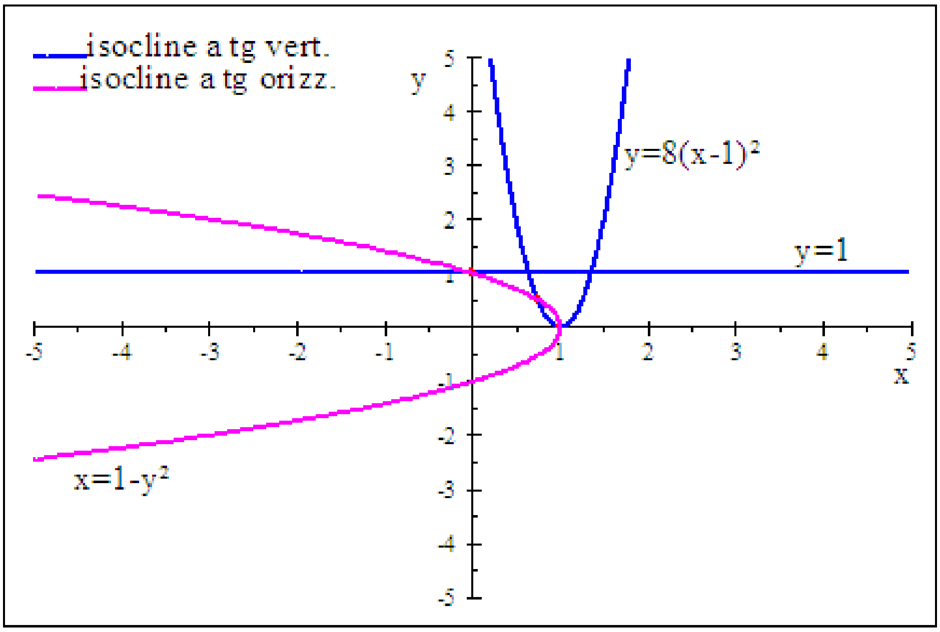


Figura 2: Isocline. I punti evidenziati in rosso sono i punti di equilibrio.

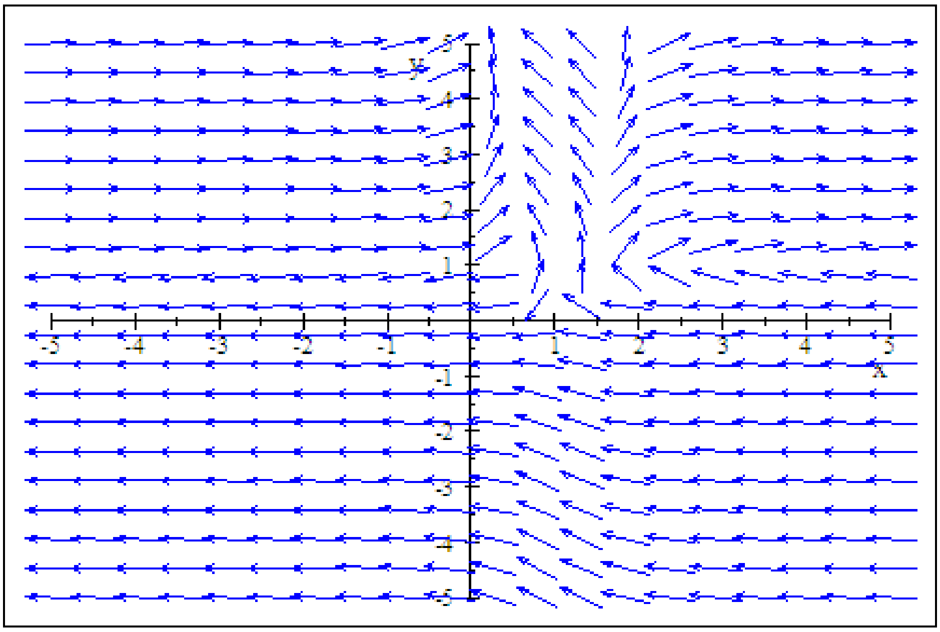


Figura 3: Campo vettoriale.

6. Sia $\mathcal{C}$ l'insieme

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, \quad 2x \leq 3y \leq 2x+3\right\}.$$

(3 punti) a. Disegnare l'insieme $\mathcal{C}$. Discutere brevemente l'esistenza del punto $\mathbf{x}^0$ di $\mathcal{C}$ con distanza minima dall'origine e calcolarne le coordinate.

(2 punti) b. Calcolare la distanza δ di $\mathbf{x}^0$ dall'origine O, il vettore unitario $\mathbf{u}$ che punta dall'origine a $\mathbf{x}^0$ e il punto medio m del segmento $\overline{Ox^0}$.

(1 punto) c. Scrivere l'equazione della retta che separa l'insieme $\mathcal{C}$ dall'origine. Si tratta di una separazione stretta?

Soluzione 0.6.

a. *Disegnamo l'insieme $\mathcal{C}$, osservando che la condizione $2x \leq 3y \leq 2x+3$ individua la regione di piano compresa tra le rette $y = \frac{2}{3}x + 1$ e la retta $y = \frac{2}{3}x$: Dato che l'insieme $\mathcal{C}$ risulta*

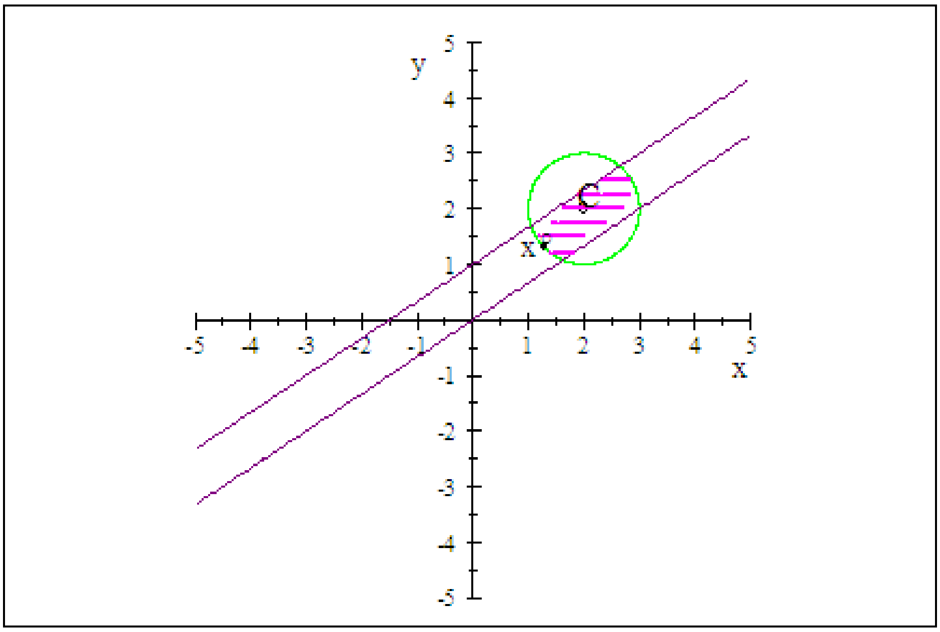


Figura 4: L'insieme $\mathcal{C}$ è la regione di piano evidenziata in violetto.

chiuso e convesso per costruzione ed inoltre, non contiene l'origine, da un Lemma visto a lezione sappiamo che l'insieme $\mathcal{C}$ contiene un punto (normalmente indicato con $\mathbf{x}^0$) che è il più vicino all'origine 0, ovvero con $\left|\mathbf{x}^0\right| = \min\{|\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}$. Per calcolare il punto $\mathbf{x}^0$ di distanza minima dall'origine 0, ragioniamo nel modo seguente. Supponiamo di considerare un fascio di rette passanti per l'origine e andiamo a vedere dove intercettano l'insieme $\mathcal{C}$ (figura 5). Le due rette limite saranno chiaramente $y = 2/3x$ (comprende un intero segmento dell'insieme $\mathcal{C}$) e la retta passante per il punto di intersezione tra la circonferenza e la retta $y = 2/3x + 1$, più vicino all'origine. Si intuisce che il punto $\mathbf{x}^0$si troverà sull'arco di circonferenza più vicino all'origine. Inoltre, dato che il centro della circonferenza è contenuto in $\mathcal{C}$, cercare il punto $\mathbf{x}^0$ di $\mathcal{C}$ con distanza minima dall'origine è equivalente a cercare il punto della circonferenza $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ più vicino all'origine.
Per calcolare $\mathbf{x}^0$, determiniamo l'intersezione tra la circonferenza e la retta r_{CO}, che è semplicemente la bisettrice $y = x$:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = x \end{cases}$$

otteniamo due punti, dei quali scegliamo quello più vicino all'origine:

$$\mathbf{x}^0 = \left(2 - \sqrt{2}/2, 2 - \sqrt{2}/2\right).$$

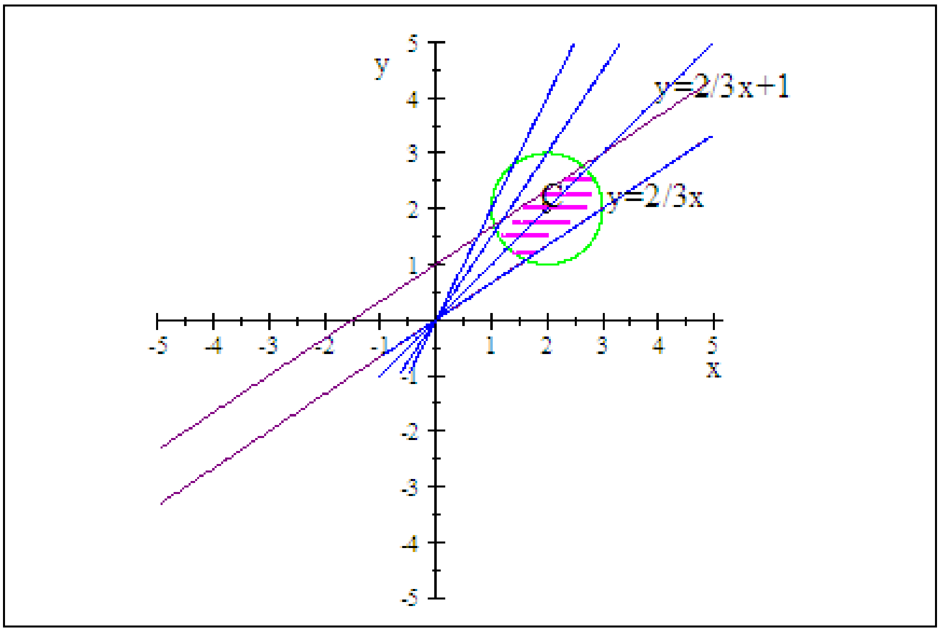


Figura 5: Fascio di rette di centro l'origine che intercetta $\mathcal{C}$.

b. *Per calcolare la distanza δ, basta calcolare la differenza tra la distanza $d(CO)$ del centro della circonferenza dall'origine meno la lunghezza del raggio:*

$$d(CO) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \text{ pertanto } \delta = 2\sqrt{2} - 1.$$

Il vettore $\mathbf{u}$ *è dato da:*

$$\mathbf{u} = \delta^{-1}\mathbf{x}^0 = \left(2\sqrt{2} - 1\right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2}/2 \\ 2 - \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Il punto medio $\mathbf{m}$ *del segmento* $\overline{Ox^0}$ *è*

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{2}/2, 2 - \sqrt{2}/2\right) = \left(1 - \sqrt{2}/4, 1 - \sqrt{2}/4\right).$$

c. *Scriviamo l'equzione della retta che separa l'insieme $\mathcal{C}$ dall'origine:*

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)\left[(x, y) - \left(1 - \sqrt{2}/4, 1 - \sqrt{2}/4\right)\right] &= 0 \\ \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}/4, y - 1 + \sqrt{2}/4\right) &= 0 \\ x + y - 2 + \sqrt{2}/2 &= 0. \end{aligned}$$

Si veda la figura 6. Il primo teorema di separazione visto a lezione, i.e separazione tra un insieme chiuso e convesso e un punto non appartenente all'insieme, garantisce che la retta trovata separa strettamente l'insieme $\mathcal{C}$ dall'origine.

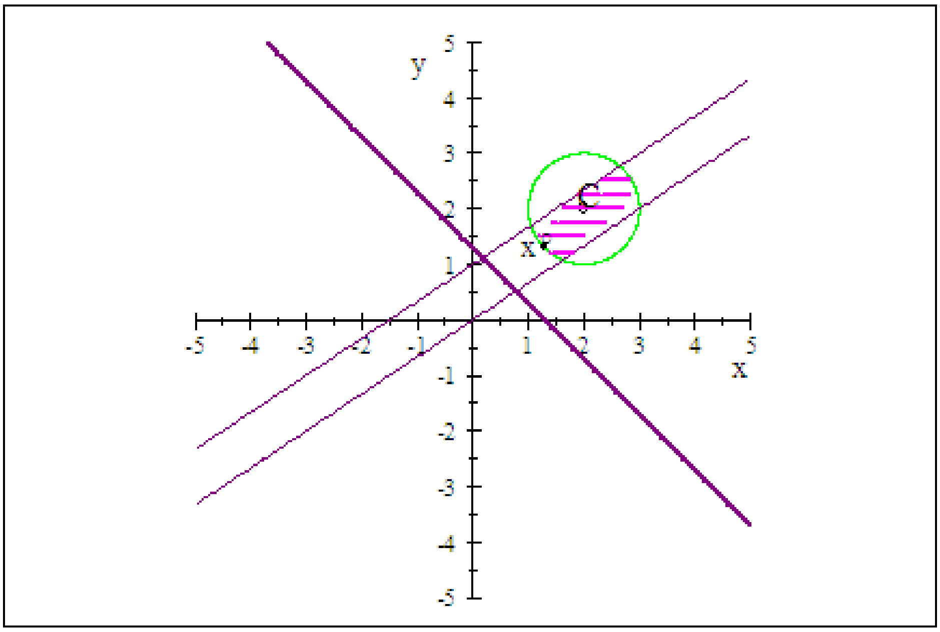


Figura 6: Retta che separa $\mathcal{C}$ dall'origine.