

Traccia dello svolgimento di alcuni esercizi del compito del 15/04/08

Esercizio 0.1. *L'esercizio richiede di risolvere in generale il seguente sistema lineare*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a. *Il sistema $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzioni se $Rg(\hat{A}) = Rg(\hat{A}|\mathbf{b})$ e il numero di soluzioni sarà $\infty^{3-Rg(\hat{A})}$. Visto che $Rg(\hat{A}) = 2$ perché il sistema abbia soluzioni sarà necessario che $\mathbf{b}$ sia linearmente dipendente dalle colonne di $\hat{A}$, oppure che $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. In entrambi i casi ci saranno $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.*

b. *Scegliamo due vettori $\mathbf{b}$ per i quali il sistema ammette soluzioni:*

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c. *Vediamo le soluzioni per il caso di $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$:
dobbiamo risolvere il sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Visto che il rango della matrice dei coefficienti è pari a 2, scegliamo un minore di rango 2 non nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x + 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Quindi, la soluzione generica del sistema con termine noto $\mathbf{b}_1$ sarà

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Al variare di x lo spazio delle soluzioni non è uno spazio vettoriale:

infatti scegliendo $x = x_1$ e $x = x_2$ si ha che $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ non è soluzione del sistema.

Passiamo ora alla soluzione per il caso di $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2$:
dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scegliamo lo stesso minore non nullo di prima:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & [1 & 1] \\ 0 & [1 & 0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}.$$

Quindi, la soluzione generica del sistema con termine noto $\mathbf{b}_1$ sarà

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

In questo caso lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale: infatti scegliendo $x = x_1$ e $x = x_2$ si ha che $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ è ancora soluzione del sistema.

Esercizio 0.2. L'esercizio richiede di risolvere il seguente sistema lineare di equazioni alle differenze:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t$$

- a. Per determinare la soluzione generale si devono calcolare autovalori e autovettori. Iniziamo con gli autovalori, sviluppando il determinante rispetto alla terza riga:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda) - (2)(-2)) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo un autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica pari a 1, e un autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica pari a 2.

Se la molteplicità geometrica di questo autovalore non sarà pari a 2, la matrice non risulterà diagonalizzabile, ma saremo in presenza di un

blocchetto di jordan.

Vediamo gli autovettori: caso $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2 & 1 \\ -2 & -1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scegliamo un minore non nullo 2×2

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+2y+z = 0 \\ -2x-3y = 0 \end{cases}$$

Fissando $z = 1$ si ottiene $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vediamo ora gli autovettori per il caso $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 1 \\ -2 & -1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

È abbastanza evidente che il rango del sistema è pari a 2, per cui la molteplicità geometrica dell'autovalore è pari a 1 e quindi siamo in presenza di un blocchetto di Jordan. Scegliamo un minore non nullo 2×2

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2x-2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Fissando $x = 1$ si ottiene $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per ottenere una nuova base

occorre anche calcolare il primo pseudo autovettore associato a $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2x-2y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Fissando $x = 0$ (possiamo farlo perchè il sistema da risolvere è non

omogeneo) si ottiene $\mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Siamo pertanto pronti a determinare la soluzione generale del sistema di equazioni alle differenze:

$$\mathbf{x}_t = \hat{A}^t \mathbf{x}_0 = \hat{U} \hat{B}^t \hat{U}^{-1} \mathbf{x}_0$$

dove $\hat{U}$ è la matrice del cambiamento di base, e $\hat{B}$ è la matrice a blocchi, rappresentazione della matrice $\hat{A}$ nella nuova base:

$$\hat{U} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{x}_t = \hat{U} \hat{B}^t \hat{U}^{-1} \mathbf{x}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

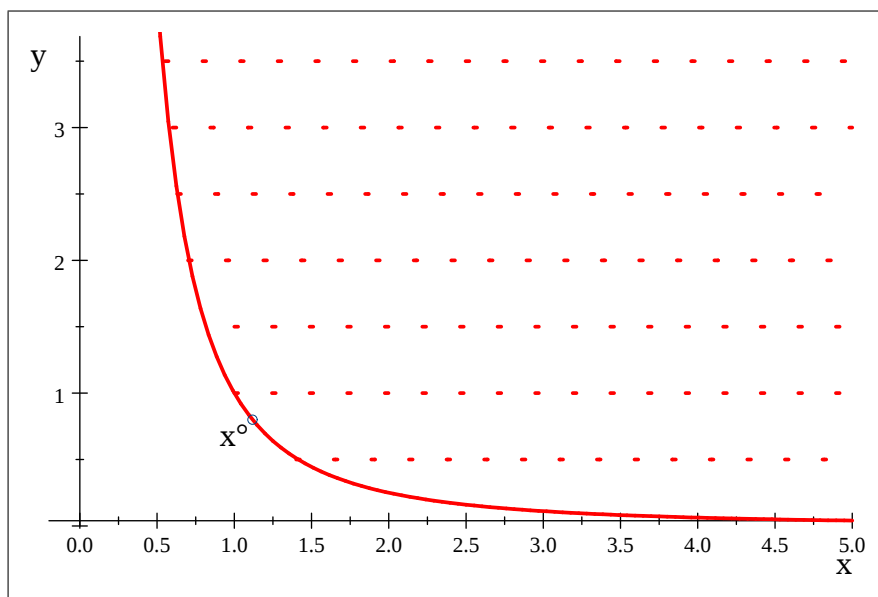
$$\mathbf{x}_t = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_1') + C_3 \mathbf{v}_2 2^t$$

- b. I punti di equilibrio di un'equazione alle differenze si ricavano ponendo $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Quindi si ha sempre la soluzione banale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e si hanno altre soluzioni solo se la matrice $\hat{A}$ ammette un autovalore pari a uno; in questo caso sono punti di equilibrio gli autovettori associati a questo autovalore, ossia l'autospazio vettoriale associato a $\lambda = 1$. Visto che questo è proprio il caso dell'esercizio, i punti di equilibrio sono

$$\mathbf{x}^* = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per $\alpha = 0$ si ottiene il punto $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ (sempre presente). Tutti questi punti di equilibrio saranno instabili perché nella matrice è presente un autovalore pari a 2.

Esercizio 0.3. L'insieme C è il seguente: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 1/x^2\}$:



Un punto generico P che sta sulla frontiera di C ha coordinate $P = (x, \frac{1}{x^2})$. La generica distanza PO è:

$$d(P, O) = \sqrt{\frac{x^6 + 1}{x^4}}$$

Calcolando la derivata, otteniamo:

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{x^6 + 1}{x^4}} \right) = \frac{x^6 - 2}{x^5} \sqrt{\frac{x^4}{x^6 + 1}}$$

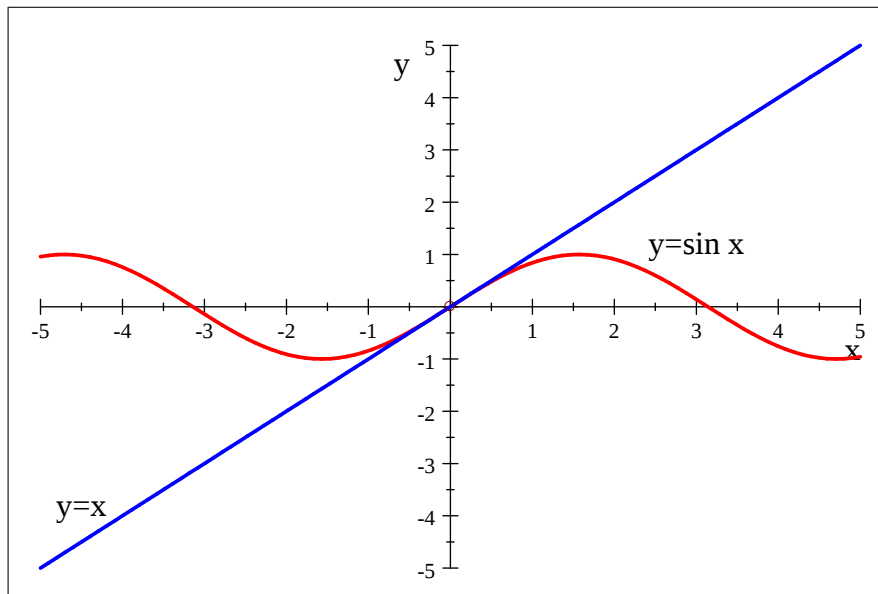
che si annulla in C per $x = \sqrt[6]{2}$. Allora il punto di minima distanza dall'origine è $\mathbf{x}^0 = (\sqrt[6]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$. Risulta pertanto:

$$d(\mathbf{x}^0, O) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}, \quad \mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt[6]{6}}{3}, \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \right), \quad \mathbf{m} = \left(\frac{\sqrt[6]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{4} \right)$$

La retta separatrice è:

$$\sqrt{2}x + y - \frac{3\sqrt[3]{4}}{4} = 0$$

Esercizio 0.4. $x' = x - \sin x$. L'origine è l'unico punto di equilibrio.



L'origine è un punto di equilibrio instabile.

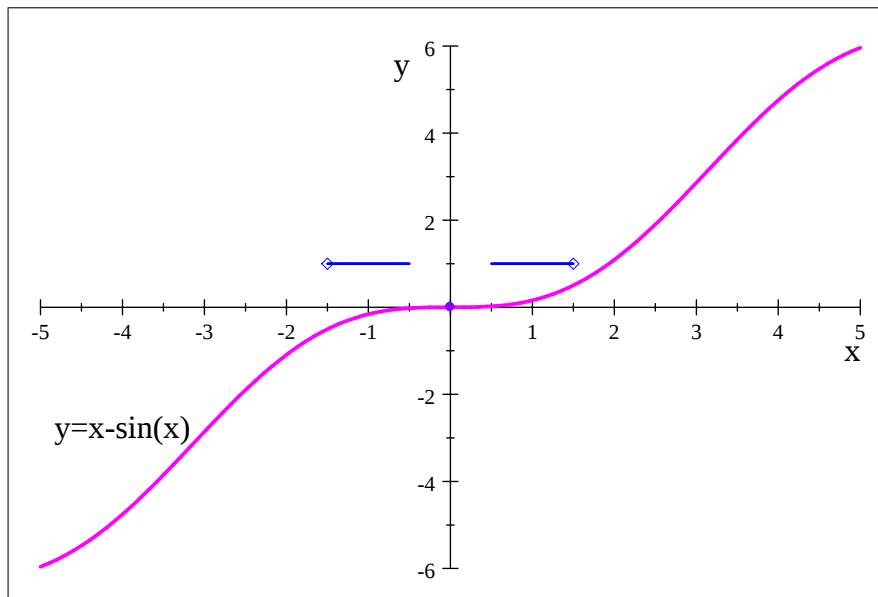


Diagramma di fase

Esercizio 0.5. $x(t+1) = ax(t) - x^2(t)$, $a > 0$. I punti fissi di $f(x) = ax - x$ sono:

$$x = 0 \quad e \quad x = a - 1, \text{ se } a \neq 1$$

L'iterata seconda è

$$f^2(x) = x [a^2 - (a + a^2)x + 2ax^2 - x^3]$$

Studiamo i punti fissi di f^2 , i.e. consideriamo $f^2(x) - x = 0$, ovvero $x [a^2 - 1 - (a + a^2)x + 2ax^2 - x^3] = 0$.

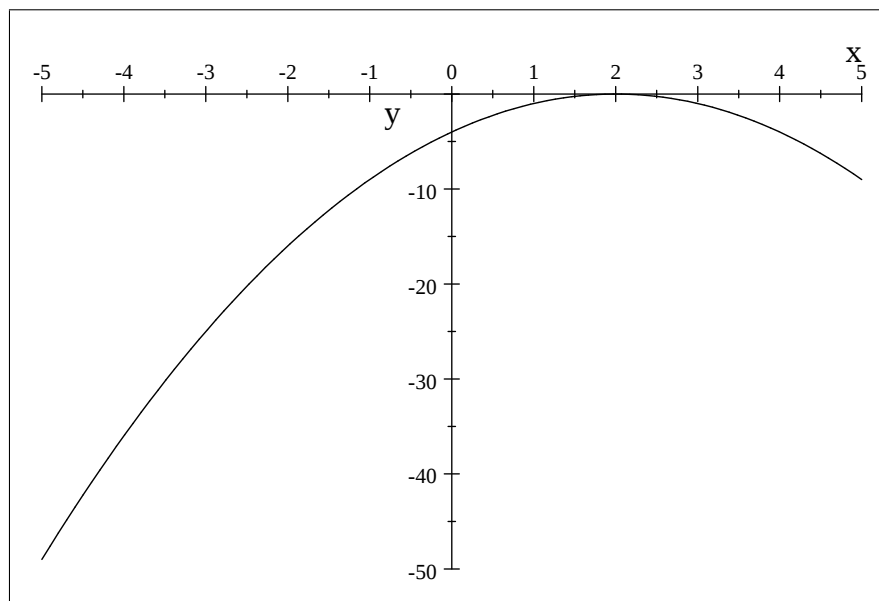
- Se $a = 1$, l'unico punto fisso di f^2 è 0 che è anche punto fisso di f , quindi non esistono orbite di periodo 2.
- Se $a \neq 1$, si ha

$$f^2(x) - x = x [a^2 - 1 - (a + a^2)x + 2ax^2 - x^3] = x(x - a + 1) [-x^2 + (a + 1)x - (a + 1)]$$

Studiando il $\Delta = (a + 1)^2 - 4(a + 1) = a^2 - 2a - 3$, vediamo che:

$$\Delta = 0 \text{ se } a = 3.$$

Se $a = 3$, abbiamo $f^2(x) - x = -x(x - 2)^3 = 0$. Non si trovano altri punti fissi oltre $x = 0$ e $x = 2$ che sono i punti fissi di f .



$$y = -x^2 + 4x - 4$$

Non esistono quindi orbite di periodo 2.

$$\Delta > 0 \text{ se } a > 3.$$

In questo caso otteniamo altri due punti fissi oltre quelli di f , che corrispondono ad un'orbita di periodo 2.

$$\Delta < 0 \text{ se } 0 < a < 3$$

Non esistono orbite di periodo 2. (Il caso particolare $a = 1$ che abbiamo studiato precedentemente rientra in questo caso più generale).

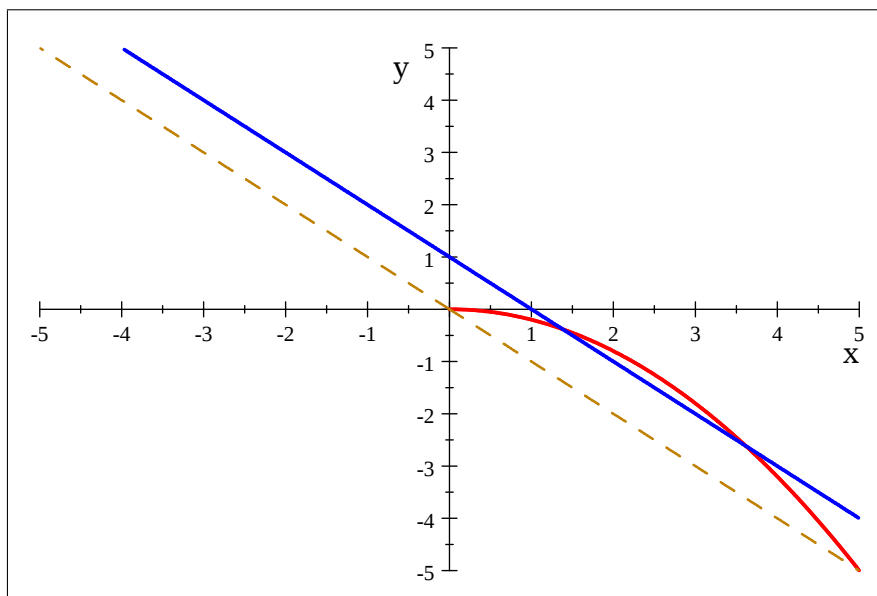
Esercizio 0.6.

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + 5y \\ y' &= \ln(x + y) \end{aligned}$$

Le equazioni delle isocline sono:

$$\begin{aligned} x^2 + 5y &= 0, & \text{isoclina a tangente verticale} \\ \ln(x + y) &= 0, \text{ i.e. } x + y = 1, & \text{isoclina a tangente orizzontale,} \end{aligned}$$

con $x + y > 0$, per l'esistenza del logaritmo.



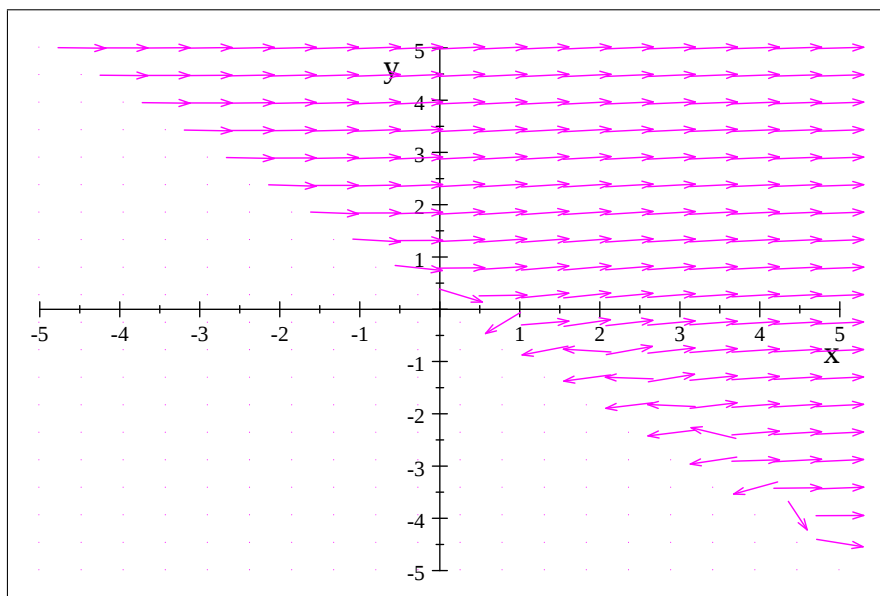
I punti di equilibrio sono: $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$ e $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{5}-3}{2}\right)$. La matrice Jacobiana è $J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \end{bmatrix}$. Valutandola nel primo punto si ha:

$$J\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right) = \begin{bmatrix} 5-\sqrt{5} & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene: $\det J\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right) = -\sqrt{5} < 0$, quindi $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$ è un colle (instabile). Valutando la matrice Jacobiana nel secondo punto si ha:

$$J\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{5}-3}{2}\right) = \begin{bmatrix} 5+\sqrt{5} & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene: $\det J\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{5}-3}{2}\right) = \sqrt{5} > 0$. Dato che la traccia è $6 + \sqrt{5} > 0$, il punto è un nodo (a due tangenti) instabile.



Campo vettoriale.