LUISS, Facoltà di Economia
Esame di Metodi Matematici per Economia e Finanza
del 27 giugno 2012
Titolare prof. Fausto Gozzi, Assistente prof. Davide Vergni

Nome e cognome	Matricola	Canale

1 Prima parte

Esercizio 1.1 [3 punti] Dato un operatore $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ discutere una tecnica pratica per determinare la dimensione della sua immagine.

Soluzione: Anzitutto bisogna definire una base di $\mathbb{U}$ e di $\mathbb{V}$. A questo punto, usando il teorema di rappresentazione, associamo a ϕ una matrice $\hat{A}_\phi$.
Il rango di questa matrice determina la dimensione dell'immagine.

Esercizio 1.2 [3 punti] Date due matrici $\hat{A}$ e $\hat{B}$ discutere le condizioni per la loro diagonalizzabilità. Discutere inoltre se esiste un caso in cui esse sono diagonalizzabili simultaneamente per mezzo dello stesso cambiamento di base.

Soluzione: Le due matrici sono diagonalizzabili se ammettono una base completa di autovettori reali. O, in altri termini, se tutti i loro autovalori sono reali e se per ogni autovalore λ si ha $\text{ma}(\lambda) = \text{mg}(\lambda)$.
Perché le due matrici siano diagonalizzabili simultaneamente occorre che esista una base completa di autovettori comuni ad entrambe le matrici.

Nome e cognome	Matricola	Canale

Esercizio 1.3

Dato l'operatore$\hat{L}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ed il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\ a\\ 1\end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}_+$,

(1 punti) a. esiste qualche valore di a per cui l'operatore $\hat{L}$ presenta sottospazi invarianti complessi?

(2 punti) b. esiste qualche valore di a per cui il vettore $\mathbf{b}$ è base di un sottospazio invariante per $\hat{L}$?

(3 punti) c. fissato uno a scelta tra i valori determinati al punto precedente, calcolare $e^{\hat{L}}\mathbf{b}$.

Svolgimento.

(1 punti) a. Per avere sottospazi invarianti complessi bisogna avere autovalori complessi. Calcoliamo gli autovalori di $\hat{L}$, sviluppando rispetto alla terza colonna:

$$\det(\hat{L}-\lambda\hat{\mathcal{I}}) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)[(a-\lambda)(1-\lambda)-1] = (1-\lambda)(\lambda^2-(1+a)\lambda-1+a).$$

Quindi un autovalore vale uno mentre per trovaer gli altri bisogna risolvere

$$\lambda^2-(1+a)\lambda-1+a=0 \quad\to\quad \lambda_{12} = \frac{(1+a)\pm\sqrt{(1+a)^2-4a+4}}{2} = \frac{(1+a)\pm\sqrt{(1-a)^2+4}}{2}$$

e visto che sotto la radice abbiamo un numero sicuramente positivo non ci possono essere autovalori complessi. d

(2 punti) b. Perché $\mathbf{b}$ sia base di un sottospazio invariante dovrà essere $\hat{L}\mathbf{b}=\lambda\mathbf{b}$:

$$\hat{L}\mathbf{b}=\lambda\mathbf{b} \quad\to\quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ a\\ 1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\ a\\ 1\end{pmatrix} \quad\to\quad \begin{cases} 2a=\lambda\\ a+1=a\lambda\\ a+1=\lambda\end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} 2a=a+1\\ 2a^2=2a\end{cases}$$

con l'unica soluzione accettabile $a=1$ e $\lambda=2$.

(3 punti) c. Dall'esercizio precedente, fissiamo $a=1$. Dobbiamo calcolare $e^{\hat{L}}\mathbf{b}$. Dalla definizione di esponenziale di matrice si ha:

$$e^{\hat{L}}\mathbf{b} = \left(\hat{\mathcal{I}}+\hat{L}+\frac{\hat{L}^2}{2!}+\frac{\hat{L}^3}{3!}+\cdots\right)\mathbf{b} = \mathbf{b}+2\mathbf{b}+\frac{2^2}{2!}\mathbf{b}+\frac{2^3}{3!}\mathbf{b}+\cdots = e^2\mathbf{b}$$

visto che $\hat{L}\mathbf{b}=2\mathbf{b}$.
Altrimenti si poteva procedere come al solito, calcolando l'esponenziale di matrice attraverso la decomposizione spettrale:

$$\det(\hat{L}-\lambda\hat{\mathcal{I}}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2),$$

dalla quale otteniamo tre autovalori reali $\lambda = 0, 1, 2$. Determiniamo gli autovettori associati a $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ (perché quello associato a $\lambda = 2$ lo abbiamo già): Calcoliamo prima l'autovettore associato a $\lambda = 0$:

$$\hat{L}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -z \end{cases} \rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora l'autovettore associato a $\lambda = 1$:

$$(\hat{L} - \hat{\mathcal{I}})\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Completata la decomposizione spettrale, possiamo scrivere la matrice $\hat{L}$ rappresentandola nella base degli autovettori $\mathbb{F} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{b})$ con

$$\hat{L}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{\hat{L}}\mathbf{b} = \hat{U} e^{\hat{L}_{\mathbb{F}}} \hat{U}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^2\mathbf{b}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'uguaglianza $\hat{U}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ottenendo il medesimo risultato già trovato.

Nome e cognome	Matricola	Canale

Esercizio 1.4

Data l'equazione differenziale: $x''' - ax' = \cos t - 1$

(4 punti) a. determinarne la soluzione generale al variare di $a > 0$;

(2 punti) b. determinarne la soluzione particolare passante per $x(0) = 1$, $x'(0) = \frac{1}{a(1+a)}$ e $x''(0) = 0$.

Svolgimento.

(4 punti) a. Si comincia risolvendo l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica si scrive: $\lambda^3 - a\lambda = 0 \ \rightarrow$ $\lambda(\lambda^2 - a) = 0$ dalla quale si ottengono tre autovalori $\lambda = 0, \pm\sqrt{a}$. Quindi la soluzione del problema omogeneo è

$$x_o(t) = c_1 + c_2 e^{-\sqrt{a}t} + c_3 e^{\sqrt{a}t}\,.$$

Per determinare le soluzioni particolari si osserva che il primo termine è associato ad un operatore differenziale con autovalore $\lambda = \pm i$ e molteplicità algebrica 1, mentre il secondo termine è associato ad un operatore differenziale con autovalore $\lambda = 0$ e molteplicità algebrica 1. In quest'ultimo caso si presenta singolarità in quanto $\lambda = 0$ è anche soluzione dell'equazione caratteristica. Per cui la nostra soluzione particolare sarà della forma:

$$x_p(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t + k_3 t$$

$$x'_p(t) = -k_1 \sin t + k_2 \cos t + k_3$$

$$x''_p(t) = -k_1 \cos t - k_2 \sin t$$

$$x'''_p(t) = k_1 \sin t - k_2 \cos t$$

Inserendo queste espressioni nell'equazione differenziale si ottiene:

$$\begin{cases} k_1 + ak_1 = 0 \\ -k_2 - ak_2 = 1 \\ -ak_3 = -1 \end{cases} = \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -\frac{1}{1+a} \\ k_3 = \frac{1}{a} \end{cases}$$

e infine

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-\sqrt{a}t} + c_3 e^{\sqrt{a}t} - \frac{\sin t}{1+a} + \frac{t}{a}\,.$$

(2 punti) b. Per determinarne la soluzione passante per la condizione iniziale dobbiamo derivare la soluzione generale per imporre le condizioni iniziali. Questo ci porta a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -\sqrt{a}c_2 + \sqrt{a}c_3 - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a(1+a)} \\ ac_2 + ac_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

e infine

$$x(t) = 1 - \frac{\sin t}{1+a} + \frac{t}{a}\,.$$

Nome e cognome	Matricola	Canale

2 Seconda parte

Esercizio 2.1 [3 punti] Enunciare correttamente il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso in cui vi siano solo vincoli di disuguaglianza. Scrivere chiaramente e precisamente le ipotesi e le tesi.

Soluzione: Vedasi Teorema 0.37 delle dispense sul sito.

Esercizio 2.2 [3 punti] Enunciare il teorema che lega concavità/convessità e condizioni sufficienti del primo ordine per minimi/massimi locali nel caso vincolato. Scrivere chiaramente e precisamente le ipotesi e le tesi.

Soluzione: Vedasi Teorema 0.39 delle dispense sul sito.

Nome e cognome	Matricola	A.A.

Esercizio 2.3

a) **[3 punti]** Dato il sistema

$$x^2 = y^2 a^3, \qquad a^3 = \ln(1 + x - y^2) + y,$$

dire se sull'insieme di soluzioni di tale sistema è possibile esprimere localmente y e a in funzione di x in un intorno del punto $(1, 1, 1)$. In tal caso, se x varia di $1/100$, di quanto varia y in un'approssimazione del primo ordine? Motivare le risposte.

b) **[3 punti]** Nel sistema sopra dire, motivando la risposta, se è possibile esprimere x e y in funzione di a in un intorno di $(1, 1, 1)$? Se sì, trovare $x'(a)$ e $y'(a)$ per $a = 1$.

Svolgimento.

Innanzitutto sostituiamo nel sistema $(x, y, a) = (1, 1, 1)$ ottenendo facilmente che il sistema è verificato per tali valori.

Poi utilizziamo il teorema delle funzioni implicite. Per vedere se è possibile applicarlo bisogna innanzitutto considerare la funzione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ottenuta come segue: si porta tutto a primo membro in ogni equazione del sistema e il primo membro di ogni equazione diventa una componente di G. Quindi

$$G(x, y, a) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 a^3 \\ a^3 - \ln(1 + x - y^2) - y \end{pmatrix}$$

Per applicare il Teorema delle Funzioni Implicite, dobbiamo per prima cosa controllare se tale funzione considerata è C^1 in un intorno del punto $(1, 1, 1)$. Ciò è vero sempre in quanto tale funzione è composizione di funzioni C^1 all'interno del suo dominio

$$D := \left\{(x, y, a) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 + x - y^2 > 0\right\}.$$

Ora calcoliamo il Jacobiano di G rispetto a tutte le variabili (x, y, a). Si ha

$$DG_{(x,y,a)}(x, y, a) = \begin{pmatrix} 2x & -2ya^3 & -3y^2a^2 \\ -\dfrac{1}{1 + x - y^2} & \dfrac{2y}{1 + x - y^2} - 1 & 3a^2 \end{pmatrix}$$

e, nel punto $(1, 1, 1)$

$$DG_{(x,y,a)}(x, y, a) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ora rispondiamo ai due punti separatamente

a) In questo caso per applicare il TFI occorre vedere se il Jacobiano di G rispetto a (y, a) (quelle che scegliamo come dipendenti) è invertibile nel punto $(1, 1, 1)$. Si ha

$$DG_{(y,a)}(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Take matrice è invertibile perchè ha determinante $-3 \neq 0$ e la sua inversa è

$$\left[DG_{(y,a)}(1, 1, 1)\right]^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Quindi si può applicare il TFI. Grazie a tale teorema sappiamo che esistono due funzioni $y(x)$ e $a(x)$, definite (e C^1) per x appartenente ad un intorno I di 1, tali che

$$G\left(x, y(x), a(x)\right) = 0 \qquad \forall a \in I$$

e

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y(1)}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial a(1)}{\partial x} \end{pmatrix} = -\left[D_{(y,a)}G\left(1,1,1\right)\right]^{-1} \cdot D_x G\left(1,1,1\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha, in particolare $y'(1) = 1$ per cui, se x varia di $1/100$, la y, in un'approssimazione del primo ordine varia di $1/100$.

b) Per rispondere occorre vedere se la matrice Jacobiana di G rispetto a (x, y) è invertibile in $(1, 1, 1)$. Si ha

$$DG_{(x,y)}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice non è invertibile perchè ha determinante 0. Quindi non si può applicare il TFI.

Nome e cognome	Matricola	A.A.

Esercizio 2.4

Dato il parametro $\beta \in (0,2)$ si consideri il problema di trovare i punti estremali locali e globali della funzione $f(x,y) = x^\beta y^\beta - \ln(x+y-1)$ sul suo campo di esistenza D.

a) **[2 punti]** Tracciare l'insieme D, dire se f è C^1 in ogni punto di D e trovarne il gradiente dove esiste.

b) **[2 punti]** Nel caso $\beta = \frac{1}{2}$, trovare gli eventuali punti stazionari.

c) **[2 punti]** Studiare la natura di tali punti dicendo se sono estremali locali e/o globali.

b) **[2 punti]** Nel caso $\beta = \frac{3}{2}$, dire se esistono punti stazionari e, se sì, quanti sono.

Svolgimento.

a. Innanzituto osserviamo che $CE(f) = D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y-1 > 0\}$. All'interno di D funzione è C^2 in quanto somma e prodotto di funzioni elementari. Notare che una parte degli assi coordinati è inclusa nel CE e su di essa la funzione non è C^1. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\beta x^{\beta-1}y^\beta - \frac{1}{x+y-1}, \beta x^\beta y^{\beta-1} - \frac{1}{x+y-1}\right)$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \beta(\beta-1))x^{\beta-2}y^\beta + \dfrac{1}{(x+y-1)^2} & \beta^2 x^{\beta-1}y^{\beta-1} + \dfrac{1}{(x+y-1)^2} \\ \\ \beta^2 x^{\beta-1}y^{\beta-1} + \dfrac{1}{(x+y-1)^2} & \beta(\beta-1))x^\beta y^{\beta-2} + \dfrac{1}{(x+y-1)^2} \end{pmatrix}$$

b. Per trovare i punti critici poniamo $\nabla f(x,y) = 0$ ottenendo il sistema

$$\begin{cases} \beta x^{\beta-1}y^\beta - \dfrac{1}{x+y-1} = 0 \\ \\ \beta x^\beta y^{\beta-1} - \dfrac{1}{x+y-1} = 0 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo

$$\beta x^{\beta-1}y^\beta - \beta x^\beta y^{\beta-1} = 0$$

che, semplificando (dato che $\beta > 0$, $x > 0$ e $y > 0$) diventa $y = x$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$\beta x^{2\beta-1} - \frac{1}{2x-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\beta x^{2\beta} - \beta x^{2\beta-1} - 1 = 0. \tag{1}$$

Poniamo ora $\beta = \frac{1}{2}$. L'equazione (1) diventa

$$x - \frac{3}{2} = 0.$$

Ne segue che l'unico punto critico è $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

c. In tale punto abbiamo che l'hessiana vale:

$$D^2 f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dato che il determinante di questa matrice è negativo la forma quadratica associata è indefinita e quindi il punto non è estremale, né locale, né globale.

d. Poniamo ora, nella (1) $\beta = \frac{1}{2}$. L'equazione (1) diventa

$$3x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 1 = 0.$$

Tale equazione non si risolve esplicitamente. Tuttavia possiamo vedere quante soluzioni ha studiando velocemente la funzione $g(x) = 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$. Si ha che $g(-\infty) = -\infty$, $g(+\infty) = +\infty$, $g'(x) = 9x^2 - 3x = 3x(3x-1)$. Quindi g cresce su $(-\infty, 0)$ e su $(\frac{1}{3}, +\infty)$ e decresce su $(0, \frac{1}{3})$. Dato che $g(0) = -2 < 0$ (e quindi, a fortiori $g(\frac{1}{3}) < 0$) il teorema di esistenza e unictà degli zeri garantisce che la funzione g ha un unico zero compreso fra $\frac{1}{3}$ e $+\infty$. Chiamiamo questo zero x_0. Da quanto svolto al punto b) si vede anche facilmente che l'unico punto critico è (x_0, x_0).