

LUISS, Facoltà di Economia
Esame di Metodi Matematici per Economia e Finanza
del 27 giugno 2012
Titolare prof. Fausto Gozzi, Assistente prof. Davide Vergni

Nome e cognome	Matricola	Canale
----------------	-----------	--------

1 Prima parte

Esercizio 1.1 [3 punti] Dato un operatore $\phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ discutere una tecnica pratica per determinare la dimensione della sua immagine.

Soluzione:

Esercizio 1.2 [3 punti] Date due matrici $\hat{A}$ e $\hat{B}$ discutere le condizioni per la loro diagonalizzabilità. Discutere inoltre se esiste un caso in cui esse sono diagonalizzabili simultaneamente per mezzo dello stesso cambiamento di base.

Soluzione:

Nome e cognome	Matricola	Canale
----------------	-----------	--------

Esercizio 1.3

Dato l'operatore $\hat{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}_+$,

- (1 punti) a. esiste qualche valore di a per cui l'operatore $\hat{L}$ presenta sottospazi invarianti complessi?
- (2 punti) b. esiste qualche valore di a per cui il vettore $\mathbf{b}$ è base di un sottospazio invariante per $\hat{L}$?
- (3 punti) c. fissato uno a scelta tra i valori determinati al punto precedente, calcolare $e^{\hat{L}}\mathbf{b}$.

Svolgimento.

Nome e cognome	Matricola	Canale
----------------	-----------	--------

Esercizio 1.4

Data l'equazione differenziale: $x''' - ax' = \cos t - 1$

(4 punti) a. determinarne la soluzione generale al variare di $a > 0$;

(2 punti) b. determinarne la soluzione particolare passante per $x(0) = 1$, $x'(0) = \frac{1}{a(1+a)}$ e $x''(0) = 0$.

Svolgimento.

Nome e cognome	Matricola	Canale
----------------	-----------	--------

2 Seconda parte

Esercizio 2.1 [3 punti] Enunciare correttamente il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso in cui vi siano solo vincoli di disuguaglianza. Scrivere chiaramente e precisamente le ipotesi e le tesi.

Soluzione:

Esercizio 2.2 [3 punti] Enunciare il teorema che lega concavità/convessità e condizioni sufficienti del primo ordine per minimi/massimi locali nel caso vincolato. Scrivere chiaramente e precisamente le ipotesi e le tesi.

Soluzione:

Nome e cognome	Matricola	A.A.
----------------	-----------	------

Esercizio 2.3

- a) **[3 punti]** Dato il sistema

$$x^2 = y^2 a^3, \quad a^3 = \ln(1 + x - y^2) + y,$$

dire se sull'insieme di soluzioni di tale sistema è possibile esprimere localmente y e a in funzione di x in un intorno del punto $(1, 1, 1)$. In tal caso, se x varia di $1/100$, di quanto varia y in un'approssimazione del primo ordine? Motivare le risposte.

- b) **[3 punti]** Nel sistema sopra dire, motivando la risposta, se è possibile esprimere x e y in funzione di a in un intorno di $(1, 1, 1)$? Se sì, trovare $x'(a)$ e $y'(a)$ per $a = 1$.

Svolgimento.

Nome e cognome	Matricola	A.A.
----------------	-----------	------

Esercizio 2.4

Dato il parametro $\beta \in (0, 2)$ si consideri il problema di trovare i punti estremali locali e globali della funzione $f(x, y) = x^\beta y^\beta - \ln(x + y - 1)$ sul suo campo di esistenza D .

- a) **[2 punti]** Tracciare l'insieme D , dire se f è C^1 in ogni punto di D e trovarne il gradiente dove esiste.
- b) **[2 punti]** Nel caso $\beta = \frac{1}{2}$, trovare gli eventuali punti stazionari.
- c) **[2 punti]** Studiare la natura di tali punti dicendo se sono estremali locali e/o globali.
- b) **[2 punti]** Nel caso $\beta = \frac{3}{2}$, dire se esistono punti stazionari e, se sì, quanti sono.

Svolgimento.