LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2010/2011

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 25/10/2011

1. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$, l'operatore $\hat{L} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, ed il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$,

(3 punti) a. Determinare il nucleo di $\hat{L}$ al variare di a.

(3 punti) b. Determinare al variare di a tutte le soluzioni al problema $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$,

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinare tutte le condizioni iniziali per cui il limite per $t \to \infty$ di $\mathbf{x}(t)$ è indipendente dal tempo.

3. Data l'equazione differenziale: $x''(t) + x(t) = e^t + \sin t$

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinare una base del nucleo dell'operatore $(D^2 + 1)$, dove D è l'operatore di incremento temporale, $Dx_t = x_{t+1}$.

4. Sia data la funzione $F : \mathbb{R}^4_+ \to \mathbb{R}$ con legge

$$F(x, y) = 2x^\alpha y^\beta - 2xy^\beta - 3x^\alpha y.$$

(3 punti) a. Dire se è possibile esprimere x come funzione C^1 di y, α, β in un intorno del punto $x = 0, y = 0, \alpha = 3/2, \beta = 3/2$. In tal caso calcolare

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta},$$

(4 punti) b. Considerare ora F come funzione di α e β con x e y parametri. Calcolare il gradiente di F rispetto a (α, β) e trovare, per $x = y = e$, l'unico punto critico. Studiarne la natura.

5. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$$

(4 punti) a. Trovare gradiente, Hessiano e punti critici. Dire, motivando la risposta, se la funzione è ovunque differenziabile o no.

(3 punti) b. Trovare $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f$. Trovare, se esistono, i punti di massimo globale e i punti di minimo globale.

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + x - y$$

e il vincolo,

$$xy = 3,$$

Si consideri il problema di trovare massimo e minimo di f sotto tale vincolo.

(1 punto) a. Scrivere il sistema di Kuhn-Tucker (KT) di tale problema.

(3 punti) b. Trovare gli eventuali punti stazionari vincolati.

(2 punti) b. Studiare la natura di tali punti.