LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2009/2010

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 25/02/2010

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -3 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinare i valori di a per cui l'operatore $\hat{L}$ ammetta sottospazi invarianti reali.

(3 punti) b. Fissato un valore di a tra quelli precedentemente trovati determinare $\hat{L}^{-n}$ come inversa di $\hat{L}^n$ (ossia in modo che $\hat{L}^{-n}\hat{L}^n = \hat{\mathcal{I}}$). Verificare il risultato.

2. Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{x}'(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t)$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio e la loro stabilità.

3. Data la funzione $f(x) = x \text{ arctg} x$, si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Disegnare il diagramma di fase.

(1 punto) c. Trovare i punti di equilibrio e dire se sono stabili o no.

(2 punti) d. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ le soluzioni locali sono anche globali.

4. Data la funzione $f(t, x) = (t + 1)x + a$ (con $a \in \mathbb{R}$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$.

(3 punti) a. Trovare la soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(3 punti) b. Nel caso in cui $a = 0$ trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie (preda-predatore con competizione per le risorse):

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t)(M - x(t)) - x(t)y(t) \\ y'(t) = -by(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

(3 punti) a. Trovare i punti di equilibrio al variare dei parametri $a, b, M > 0$.

(3 punti) b. Discutere la loro stabilità.