LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2007/2008

Corso di "Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 22/07/2008

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la sua base canonica $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$.
Definiamo su di esso una nuova base $\mathbb{F} = (\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \mathbf{f}_3)$ con

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \,, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \,, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 \,.$$

(3 punti) a. Se la rappresentazione dell'operatore $\hat{L}$ nella base $\mathbb{F}$ è $\hat{L}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qual'è la sua rappresentazione nella base $\mathbb{E}$?

(3 punti) b. La rappresentazione dell'operatore $\hat{L}$ nella base $\mathbb{F}$ ha un autovalore pari a zero. Dopo averne calcolato l'autovettore associato, determinare come cambiano autovalore e autovettore se si rappresenta $\hat{L}$ nella base canonica.

2. Data l'equazione alle differenze lineare e omogenea in $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$,

(1 punto) a. determinare per quali valori di a le soluzioni del sistema sono combinazioni lineari di funzioni trigonometriche;

(3 punti) b. per un valore di a a scelta tra quelli determinati al punto precedente, calcolare la soluzione generale del sistema;

(2 punti) b. per quello stesso valore, calcolare la soluzione particolare con condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione alle differenze:

$$x(t+1) = (a-1)x(t) - ax^2(t),$$

con $a > 0$, parametro reale.

(3 punti) 1. Indicata con f la dinamica, determinare l'iterata seconda f^2.

(3 punti) 2. Discutere l'esistenza di orbite di periodo 2 al variare di a.

4. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$x'(t) = x^2(t) - \cos x(t).$$

(4 punti) a. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

(2 punti) b. Tracciare il diagramma di fase.

5. Siano $X = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x'(t) = 8\left(x(t) - 1\right)^2 \left(y(t) - 1\right) - y^2(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y^2(t) - 1. \end{cases}$$

(4 punti) a. Determinare i punti di equilibrio, studiarne la stabilità e la natura.

(2 punti) b. Determinare le isocline e tracciare il diagramma di fase.

6. Sia $\mathcal{C}$ l'insieme

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, \quad 2x \leq 3y < 2x + 3\right\}.$$

(3 punti) a. Disegnare l'insieme $\mathcal{C}$. Discutere brevemente l'esistenza del punto $\mathbf{x}^0$ di $\mathcal{C}$ con distanza minima dall'origine e calcolarne le coordinate.

(2 punti) b. Calcolare la distanza δ di $\mathbf{x}^0$ dall'origine O, il vettore unitario $\mathbf{u}$ che punta dall'origine a $\mathbf{x}^0$ e il punto medio m del segmento $\overline{Ox^0}$.

(1 punto) c. Scrivere l'equazione della retta che separa l'insieme $\mathcal{C}$ dall'origine. Si tratta di una separazione stretta?