LUISS, Facoltà di Economia
Esame di Metodi Matematici per Economia e Finanza
del 22 Febbraio 2012
Titolare prof. Fausto Gozzi, Assistente prof. Davide Vergni

Nome e cognome	Matricola	A.A.

1 Prima parte

Esercizio 1.1 [3 punti] Discutere, se esiste, il legame tra il nucleo di un operatore ed i suoi sottospazi invarianti.

Soluzione:

Esercizio 1.2 [3 punti] Dato un generico problema lineare $\phi x = b$, dove $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e $x, b \in \mathbb{V}$, discutere brevemente ma esaurientemente quali sono le condizioni per cui tale problema ammette soluzione.

Soluzione:

Nome e cognome	Matricola	A.A.

Esercizio 1.3

Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

(2 punti) a. Determinare per quali valori di a l'operatore non è diagonalizzabile.

(1 punti) b. Esiste qualche valore di a per cui l'operatore anche avendo sottospazi invarianti reali non è diagonalizzabile?

(3 punti) c. Scelto un valore di a tra quelli del punto b., calcolare $e^{\hat{L}}$.

Svolgimento.

Nome e cognome	Matricola	A.A.

Esercizio 1.4

Data l'equazione differenziale: $x'' + x = \cos at$

(4 punti) a. determinarne la soluzione generale al variare di a.

(2 punti) b. Fissato il valore di $a = 0$ determinare la soluzione particolare passante per $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.

Svolgimento.

Nome e cognome	Matricola	A.A.

2 Seconda parte

Esercizio 2.1 [3 punti] Enunciare correttamente il teorema di Fermat sulla condizione necessaria del primo ordine per punti estremali. Scrivere chiaramente e precisamente le ipotesi e le tesi. Dire sotto quali ipotesi aggiuntive tale condizione diventa sufficiente.

Soluzione:

Esercizio 2.2 [3 punti] Descrivere schematicamente ma esaurientemente il legame tra convessità, concavità di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e la sua matrice Hessiana:
- nel caso in cui A sia aperto;
- nel caso in cui A non sia aperto.

Soluzione:

Nome e cognome	Matricola	A.A.

Esercizio 2.3

a) **[3 punti]** Enunciare correttamente il teorema delle funzioni implicite nel caso generale in cui $G : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Scrivere chiaramente e precisamente le ipotesi e le tesi.

b) **[3 punti]** Dato il sistema
$$xya = 1, \qquad x^2 \ln(ya) = 0,$$
dire se sull'insieme di soluzioni di tale sistema è possibile esprimere localmente y e a in funzione di x in un intorno del punto $(1, 1, 1)$. E' possibile esprimere x e y in funzione di a in un intorno di $(1, 1, 1)$? Motivare le risposte.

Svolgimento.

Nome e cognome	Matricola	A.A.

Esercizio 2.4

Dato il parametro $\beta \in (0,1)$ i consideri il problema di massimizzare la funzione $f(x,y) = x^\beta y^\beta - x$ sull'insieme

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : \ 2x + y \leq 1\}.$$

a) **[2 punti]** Tracciare l'insieme D a dire se f è C^1 in ogni punto di D.

b) **[3 punti]** Nel caso $\beta = \frac{1}{2}$, trovare gli eventuali punti stazionari vincolati di f su D.

c) **[2 punti]** Dire se tali punti sono o meno punti estremali globali.

Svolgimento.