

LUISS, Facoltà di Economia
Esame di Metodi Matematici per Economia e Finanza
del 20 Gennaio 2012
Titolare prof. Fausto Gozzi, Assistente prof. Davide Vergni

Nome e cognome	Matricola	Canale
----------------	-----------	--------

1 Prima parte

Esercizio 1.1 [2 punti] Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V}$ di dimensione n e dato un insieme di k vettori descrivere sinteticamente le condizioni per cui tale insieme definisce una base per $\mathbb{V}$.

Soluzione:

Esercizio 1.2 [4 punti] Descrivere brevemente ma esaurientemente il legame tra il nucleo di un operatore $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ e l'insieme delle soluzioni del problema lineare $\phi x = b$ con $x, b \in \mathbb{V}$.

Soluzione:

Nome e cognome	Matricola	Canale
----------------	-----------	--------

Esercizio 1.3

Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \geq 0$.

- (4 punti) a. Determinare al variare di a autovalori ed autovettori di $\hat{L}$.
- (1 punti) b. Determinare se esistono valori di a per cui $\hat{L}$ ammetta sottospazi invarianti complessi.
- (1 punti) c. Determinare se esistono valori di a per cui $\hat{L}$ non sia diagonalizzabile.

Svolgimento.

Nome e cognome	Matricola	Canale
----------------	-----------	--------

Esercizio 1.4

Data l'equazione alle differenze: $x_{t+1} = ax_t + 1$

(4 punti) a. Determinarne al variare di a la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinare la soluzione particolare passante per $x_1 = 0$ e dire in quali casi il limite per $t \rightarrow \infty$ di tale soluzione è finito.

Svolgimento.

Nome e cognome	Matricola	Canale
----------------	-----------	--------

2 Seconda parte

Esercizio 2.1 [3 punti] Enunciare correttamente il teorema delle funzioni implicite scrivendo chiaramente e precisamente le ipotesi e le tesi.

Soluzione:

Esercizio 2.2 [3 punti] Descrivere schematicamente ma esaurientemente il legame tra il segno di una matrice simmetrica e i suoi minori principali (di guida e non).

Soluzione:

Esercizio 2.3

Data la funzione (dipendente dal parametro $p > 0$)

$$f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} - p(x + y)$$

(si ricordi che $\mathbb{R}_{++}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$):

- a) **[2 punti]** determinarne, al variare di p , il gradiente e l'Hessiano;
- b) **[2 punti]** trovare, al variare di p , gli eventuali punti critici;
- c) **[2 punti]** dire, al variare di p , se tali punti sono o meno punti estremali globali.

Svolgimento.

Esercizio 2.4

Si consideri il problema di massimizzare la funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sull'insieme

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

- a) **[2 punti]** dire se le NDCQ sono verificate in ogni punto di D e scrivere il sistema delle condizioni necessarie di Lagrange;
- b) **[2 punti]** trovare gli eventuali punti critici di f su D (interni e vincolati). Suggerimento: per trovare i punti vincolati supponete di sapere che in essi $x = y$. Chi dimostra perché è effettivamente $x = y$ avrà un premio di 2 punti suppletivi.
- c) **[2 punti]** dire se tali punti sono o meno punti estremali globali.

Svolgimento.