LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2009/2010

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 20/01/2010

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinare il nucleo di $\hat{L}$ al variare di a.

(3 punti) b. Fissato un opportuno valore di a, trovare almeno un vettore che non appartiene all'immagine di $\hat{L}$.

2. Si consideri l'equazione alle differenze $\mathbf{x}_{n+1} = \hat{A}\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$.

(3 punti) b. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) a. Determinarne i punti di equilibrio e la loro la natura.

3. Data la funzione $f(x) = ax^2(M - x)$, si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2 punto) b. Trovare i punti di equilibrio e disegnare il diagramma di fase.

(2 punti) c. Discutere, motivando la risposta, la stabilità dei punti di equilibrio e la monotonia delle soluzioni.

(1 punti) d. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale.

4. Data la funzione $f(x) = x \log x$, considerare il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$.

(2 punti) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 > 0$. Trovare i punti di equilibrio.

(2 punto) b. Trovare, motivando la risposta, la soluzione locale per ogni $x_0 > 0$.

(2 punto) c. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale e se i punti di equilibrio sono stabili.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y^2(t) \\ y' = e^{x(t)} + y^2(t) - 1 \end{cases}$$

(3 punti) a. Trovare i punti di equilibrio (suggerimento: la ricerca dei punti di equilibrio si riduce allo studio di un'oppurtuna funzione di una singola variabile).

(3 punti) b. Discutere la loro stabilità.