

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”

Prof. Fausto Gozzi

Esame del 22/09/2005

1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \arctan x(t) + \frac{1}{2}x(t), \\
 x(0) &= x_0
 \end{aligned}$$

dire se la DE ha punti di equilibrio e discuterne la stabilità. Inoltre, se  $x_0 \geq 0$ , è possibile che la soluzione diventi negativa per un certo  $t > 0$ ? Giustificare la risposta.

2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= x(t) - x^2(t) + x^3(t), \\
 x(0) &= x_0
 \end{aligned}$$

discutere esistenza e unicità locale e globale al variare di  $x_0 \in \mathbb{R}$  e tracciare il diagramma delle curve integrali.

3. Sia data l'equazione differenziale lineare omogenea in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinarne la soluzione generale e studiare il carattere del punto di equilibrio (0,0). Disegnare qualitativamente le curve integrali. Determinare la soluzione passante al tempo  $t = 0$  per

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Data il sistema di equazione differenziali non lineare in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x^2 + y - 2 \end{cases},$$

studiare la stabilità dei punti di equilibrio. Disegnare qualitativamente le curve integrali nel primo quadrante ( $x > 0, y > 0$ ).

5. Data la funzione di due variabili:

$$f(x) = -x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

- trovare eventuali punti di massimo e minimo assoluto su  $\mathbb{R}^2$ ;
- discutere l'esistenza di punti di massimo e minimo assoluto sull'insieme

$$A = \{x_1 > 0, x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\};$$

- trovare, se esistono, tali punti.