LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2004-2005

Corso di "Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie"
Prof. Fausto Gozzi

Esame del 30/06/2005

1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sin x(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

dire se la DE ha punti di equilibrio e discuterne la stabilità. Inoltre, se $x_0 \in (0,\pi)$, è possibile che la soluzione diventi negativa per un certo $t > 0$? Giustificare la risposta.

2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + x^3(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

discutere esistenza e unicità locale e globale al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ e tracciare il diagramma delle curve integrali.

3. Sia data l'equazione differenziale lineare non omogenea in $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x}\prime(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t).$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinare la traiettoria che parte da

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Data l'equazione differenziale non lineare in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = & 1 - xy \\ y' = & y - x^2 \end{cases},$$

trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità. Dire se le curve integrali che partono dal quarto quadrante ($x > 0$, $y < 0$) sono destinate a lasciare questo quadrante.

5. Data la funzione ($\alpha \in (0,1)$)

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 x_2)^\alpha - x_1 x_2.$$

Dire, motivando la risposta, se esistono punti di minimo globale su $\mathbb{R}^2_+$. Trovare $\inf_{\mathbb{R}^2_+} f$.

Trovare, se esistono, i punti di massimo locale globale di f su $\mathbb{R}^2_{++}$ (la parte interna del primo quadrante).

Dato l'insieme $A = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 5\}$. Dire se esistono massimi e minimi di f su A.

Scrivere le condizioni necessarie e trovare la soluzione.