

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”
Prof. Fausto Gozzi
Esame del 16/06/2005

1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + x^3(t) + 1, \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

dire se la DE ha punti di equilibrio e discuterne la stabilità. Inoltre, se $x_0 \geq 0$, è possibile che la soluzione diventi negativa per un certo $t > 0$? Giustificare la risposta.

2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) + x^3(t) + 1, \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

dire se la ODE ha punti di equilibrio e discuterne la stabilità. (Suggerimento: tracciate il grafico della funzione $f(x) = x + x^3 + 1$).

3. Data l'equazione differenziale lineare e omogenea in \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

determinarne la soluzione generale e studiare il carattere del punto di equilibrio $(0, 0)$. Disegnare qualitativamente le curve integrali. Determinare la soluzione passante al tempo $t = 0$ per

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Data l'equazione differenziale non lineare in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' = -x(x+1) \\ y' = -y^3 \end{cases},$$

trovarne i punti di equilibrio e studiarne la stabilità. Studiando qualitativamente le curve integrali determinare la natura del punto di equilibrio $(0, 0)$.

5. Data la funzione (per $\alpha \in (0, 1)$)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} + x_1 + x_2,$$

Dire, motivando la risposta, se è concava su \mathbb{R}_+^2 .

Inoltre dire, motivando la risposta, se esistono punti di massimo o minimo globale su \mathbb{R}_+^2 .

Infine considerare il problema di massimizzare f sull'insieme $A = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 3\}$.

Dire se esiste la soluzione, scrivere le condizioni necessarie e trovare la soluzione per $\alpha = \frac{1}{2}$.