

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”

Prof. Fausto Gozzi e Dr. Davide Vergni

Esame del 19/07/2006

1. Data la matrice $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed un numero $n \in \mathbb{N}$, calcolare $\mathbf{v}_n = \hat{A}^n \mathbf{u}$.

2. Dimostrare che la seguente equazione differenziale $x' = x^2 + \log(x)$ possiede un unico punto di equilibrio. Studiarne la stabilità sia in modo qualitativo che con la linearizzazione.

3. Determinare i punti di equilibrio dell'equazione alle differenze $x_{n+1} = x_n^3 - ax_n$ al variare del parametro a studiandone la stabilità.

4. Data l'equazione differenziale non lineare in $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x' = \log(y) - x \\ y' = y + x - 1 \end{cases}$, trovarne i punti di equilibrio determinandone la stabilità.

(**Facoltativo:** Studiare qualitativamente le curve integrali intorno ad un punto di equilibrio a scelta.)

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con legge

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 + a \ln(x_1 x_2).$$

Determinare il Campo di Esistenza A di tale legge e disegnarlo sul piano cartesiano. Determinarne i punti critici al variare di $a \in \mathbb{R}$ e studiarne la natura. Dire poi per quali $a > 0$ la funzione è convessa sull'insieme

$$B = \{x_1 > 2; x_2 > 3\}.$$

6. Data la funzione di profitto $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ con legge

$$\Pi(x_1, x_2) = x_1 + x_2^{\frac{1}{2}} - ax_1^2 - bx_2$$

(con $a, b > 0$).

Trovare gradiente ed Hessiano di $\Pi(\mathbf{x})$.

Scrivere le condizioni necessarie di ottimalità per Π sulla regione

$$Q = \{x_1 \in [1, 5]; x_2 \in [2, 6], x_1 + x_2 \leq 5\}.$$

Trovare massimo a minimo di Π su Q .