LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2007/2008

Corso di "Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie"

Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 16/09/2008

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito come $\hat{L} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2 punti) a. Determinare i valori di a per cui $\hat{L}$ non ammette sottospazi invarianti reali.

(2 punti) b. Scegliendo un valore di a tra quelli determinati al punto precedente calcolare autovalori e autovettori (complessi) di $\hat{L}$.

(2 punti) c. Determinare la rappresentazione del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base degli autovettori complessi.

2. Data l'equazione differenziale lineare e omogenea in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

3. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione differenziale a coefficienti costanti non omogenea:

$$x''(t) - x(t) = te^t.$$

(4 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Calcolare la soluzione particolare relativa ai dati iniziali

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

4. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} = \mathbb{N}$. Si consideri la seguente equazione alle differenze:

$$x(t+1) = x^4(t) - 2x^3(t) + x^2(t) + 1.$$

(4 punti) a. Determinarne il numero di punti di equilibrio studiandone la stabilità.

(2 punti) b. Abbozzare il grafico della dinamica.

5. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x'(t) = \ln(2y(t) - 1) \\ y'(t) = x^3(t) + 2x^2(t) - x(t)y^2(t) - 2y^2(t). \end{cases}$$

(4 punti) a. Determinarne i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

(2 punti) b. Determinare le isocline e tracciare il diagramma di fase.

6. Sia $\mathcal{C}$ l'insieme

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - 3x \leq y - 3\right\}.$$

(3 punti) a. Disegnare l'insieme $\mathcal{C}$. Discutere brevemente l'esistenza del punto $\mathbf{x}^0$ di $\mathcal{C}$ con distanza minima dall'origine e calcolarne le coordinate.

(2 punti) b. Calcolare la distanza δ di $\mathbf{x}^0$ dall'origine, il vettore unitario $\mathbf{u}$ che punta dall'origine a $\mathbf{x}^0$ e il punto medio m del segmento $\overline{Ox^0}$.

(1 punto) c. Scrivere l'equazione della retta che separa l'insieme $\mathcal{C}$ dall'origine. Si tratta di una separazione stretta?