

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”  
Prof. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 16/10/2008

1. Data la matrice  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

- (3 punti) a. Determinare la matrice  $e^{\hat{A}}$ .  
(2 punti) b. Determinare la matrice  $e^{-\hat{A}}$ .  
(1 punto) c. Verificare se  $e^{\hat{A}} \cdot e^{-\hat{A}} = \hat{I}$ .

2. Sia data l'equazione differenziale lineare omogenea in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (2 punti) a. Determinare la soluzione generale.  
(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio e il loro carattere.  
(3 punti) c. Disegnare le curve integrali.

3. Siano  $X = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ . Si consideri la seguente equazione:

$$x(t+1) = f(t, x(t)),$$

dove la funzione  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da  $f(t, x(t)) = 2 \log(1 + x(t))$ .

- (1 punto) a. Disegnare il grafico della dinamica  $f$ .  
(3 punti) b. Determinare i punti di equilibrio.  
(3 punti) c. Studiarne la stabilità.

4. Sia  $X = Y = \mathbb{R}$ . Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 4 \\ y' = x^3 - xy^2. \end{cases}$$

(3 punti) a. Determinare le equazioni delle isocline e i punti di equilibrio.

(2 punti) b. Studiare la stabilità e la natura dei punti di equilibrio

(2 punti) c. Tracciare il diagramma di fase.

5. Si consideri il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  per  $\mathbf{x} \geq 0$ , dove  $A$  la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1/2 \\ -3 & 1/2 & 4 \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{b}$  un vettore di  $\mathbb{R}^2$ .

(1 punto) a. Disegnare il cono finito  $C = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0\}$ .

(2 punti) b. Trovare almeno un vettore  $\mathbf{b}$  tale che il sistema ammette soluzione  $\mathbf{x} \geq 0$ .

(3 punti) c. Si assuma che  $\mathbf{b}$  possa assumere i seguenti valori:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Indicati con  $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$  i vettori colonna della matrice  $A$ , stabilire (motivando la risposta) se per qualche scelta dei vettori  $\mathbf{b}$  elencati, possibile trovare dei vettori  $\mathbf{y}$  che soddisfino

$$\mathbf{y}^T \mathbf{a}^1 = 4, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{a}^2 \geq 0, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{a}^3 \geq 0, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0. \quad (1)$$

In caso affermativo, per uno di questi vettori  $\mathbf{b}$  trovare almeno un vettore  $\mathbf{y}$  che soddisfi (1).