LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2009/2010

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 16/02/2010

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinare i valori di a per cui $\text{Ker}(\hat{L}) = \{\mathbf{0}\}$.

(3 punti) b. Mostrare che esistono autovettori di $\hat{L}$ che non dipendono dal parametro a.

2. Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{x}'(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t)$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a+1 & -3 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale fissando a in modo da avere spettro complesso.

(2 punti) b. Determinare la soluzione particolare passante per $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$.

(1 punti) c. Determinare a in modo da avere infiniti punti di equilibrio. Discuterne la stabilità.

3. Data la funzione $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} - a$ (con $a \geq 0$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Fissato $a = 0$, trovare i punti di equilibrio, dire se sono stabili o no e disegnare il diagramma di fase.

(1 punto) c. Fissare $a = 0$. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ le soluzioni locali sono anche globali.

(2 punti) d. Sia $a > 0$. Trovare i punti di equilibrio al variare di a e dire se sono stabili o instabili.

4. Data la funzione $f(x) = ax(1-x)$ (con $a > 1$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$.

(2 punti) a. Trovare i punti di equilibrio al variare di $a > 1$.

(2 punti) b. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio al variare di $a > 1$.

(2 punti) c. Sia $a = 2$. Calcolare $g(x) = f \circ f(x)$ e dire quanti punti di equilibrio ha la ED $x_{n+1} = g(x_n)$. Facoltativo: esiste un legame tra i punti di equilibrio trovati e quelli della ED iniziale? Perché?

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)y(t) + x^3(t) \\ y'(t) = y(t) - 2x(t) - 1 \end{cases}$$

(2 punti) a. Determinare le equazioni delle curve isocline ($x' = 0$ e $y' = 0$) e darne una rappresentazione grafica.

(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.

(2 punti) b. Tracciare il diagramma di fase del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio con y positiva.