

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”
 Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 15/09/2010

1. Sia dato l'operatore $\hat{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3 punti) a. Determinare il valore di a per cui \mathbf{v} è base di un sottospazio invariante di \hat{L} .

(3 punti) b. Per il valore di a precedentemente trovato, calcolare $e^{\hat{L}}$.

2. Sia dato il sistema di equazioni alle differenze in \mathbb{R}^2 : $\mathbf{x}_{n+1} = \hat{A}\mathbf{x}_n$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(2 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio discutendone la stabilità.

(2 punti) c. Determinare il limite per $n \rightarrow \infty$ di \mathbf{x}_n se $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Data la funzione $f(x) = \frac{x^2 + a}{2}$ si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(1 punto) a. Disegnare la dinamica $f(x)$ per qualche valore di a .

(2 punti) b. Determinare i valori di a per cui esistono punti di equilibrio.

(3 punti) a. Discuterne la stabilità al variare di a .

4. Data la funzione $f(x) = \frac{x}{1+x}$ si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Trovare i punti di equilibrio e disegnare il diagramma di fase.

(2 punti) c. Discutere, motivando la risposta, la stabilità dei punti di equilibrio e la monotonia delle soluzioni.

(1 punto) d. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x'(t) = x^3(t) + x^2(t)y(t) \\ y'(t) = -y(t) + x(t) - 1 \end{cases}$$

(2 punti) a. Disegnare le isocline ($x' = 0$ e $y' = 0$).

(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio discutendone la stabilità.

(2 punti) c. Determinare le traiettorie del sistema linearizzato intorno ad un punto di equilibrio scelto da voi.