LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2009/2010

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"

Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 15/06/2010

1. Sia dato l'operatore $\hat{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$

(4 punti) a. Trovare a e b in modo che l'equazione $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ammetta infinite soluzioni. Determinare tali soluzioni.

(2 punti) b. Per i valori di a precedentemente trovati, discutere la diagonalizzabilità di $\hat{L}$.

2. Sia dato il sistema di equazioni alle differenze in $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{x}_{n+1} = \hat{A}\mathbf{x}_n$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(2 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio e la loro stabilità.

(1 punti) c. Determinare il limite per $n \to \infty$ di $\mathbf{x}_n$ se $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Data la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(1 punto) a. Dire, motivando la risposta, se esiste un'unica soluzione locale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Trovare i punti di equilibrio e disegnare il diagramma di fase.

(2 punti) c. Discutere, motivando la risposta, la stabilità dei punti di equilibrio e la monotonia delle soluzioni.

(1 punto) d. Dire, motivando la risposta, per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale.

4. Data la funzione $f(t, x) = x - a \sin x$ (con $a > 0$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(3 punti) a. Trovare i punti di equilibrio al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(3 punti) b. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) = -2y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

(2 punti) a. Disegnare le isocline del sistema (i.e., le curve di equazioni $x' = 0$ e $y' = 0$).

(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio discutendone la stabilità.

(2 punti) c. Determinare le traiettorie del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio con $x > 0$ e $y > 0$.