

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”
 Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 15/04/2008

1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{dove} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2 punti) a. discutere l'esistenza di possibili soluzioni per un generico vettore \mathbf{b} ;
 (2 punti) b. trovare almeno un vettore \mathbf{b} tale che il sistema ammetta soluzioni;
 (2 punto) c. per quel valore di \mathbf{b} determinare tutte le soluzioni specificando se formano un sottospazio vettoriale.

2. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}^3$. Si consideri il seguente sistema lineare di equazioni alle differenze:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \hat{A}\mathbf{x}_t \quad \text{dove} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (3 punti) a. determinarne la soluzione generale;
 (3 punti) b. determinarne i punti di equilibrio discutendone la stabilità.

3. Sia \mathcal{C} l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, yx^2 \geq 1\}$.

- (2 punti) a. Disegnare l'insieme \mathcal{C} e trovare le coordinate del punto x^0 di \mathcal{C} con distanza minima dall'origine.
 (2 punti) b. Calcolare la distanza δ di x^0 dall'origine O , il vettore unitario \mathbf{u} che punta dall'origine a x^0 e il punto medio m del segmento $\overline{Ox^0}$.
 (1 punto) c. Scrivere l'equazione della retta che separa strettamente l'insieme \mathcal{C} dall'origine.
 (1 punto) d. Disegnare un insieme convesso ma non chiuso tale che risulti disgiunto da \mathcal{C} e contenga l'origine.

4. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione differenziale: $x'(t) = x(t) - \sin x(t)$.

- (3 punti) a. Dimostrare che esiste un unico punto di equilibrio.
 (3 punti) b. Studiarne la stabilità.

5. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. Si consideri l'equazione alle differenze: $x(t+1) = ax(t) - x^2(t)$.

- (3 punti) a. Indicata con f la dinamica, determinare l'iterata seconda f^2 .
 (3 punti) b. Discutere l'esistenza di orbite di periodo 2 al variare di a .

6. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x^2 + 5y \\ y' = \ln(x + y) \end{cases}$$

- (4 punti) a. Determinare i punti di equilibrio, studiarne la stabilità e la natura.
 (2 punti) b. Determinare le isocline e tracciare il diagramma di fase.