LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2010/2011

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"

Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 13/07/2011

1. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$, l'operatore $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$, ed il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(3 punti) a. Determinare i valori di a per cui non esistono soluzioni al problema $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(3 punti) b. Determinare il codominio di $\hat{L}$ al variare di a.

2. Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$,

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinarne la soluzione particolare passante per $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1 punti) c. Determinare il limite per $t \to \infty$ della soluzione trovata al punto precedente.

3. Data l'equazione alle differenze: $x_{t+2} + 4x_t = 1 + (-1)^t$

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinare una base del nucleo dell'operatore $(D^2 + 4)$, dove D è l'operatore di incremento temporale, $Dx_t = x_{t+1}$.

4. Sia data la funzione $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ con legge

$$F(x, y) = 2x^\alpha y + 2xy^\beta - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2$$

dipendente dai due parametri $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in (0, 1)$.

(3 punti) a. Calcolare il gradiente di F rispetto a (x, y) e verificare che, per $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, il punto $(x, y) = (1, 1)$ è un punto critico di massimo locale per F.

(4 punti) a. Trovare, spiegando perché ciò è possibile, come varia tale punto critico al variare dei parametri α e β "vicini" al valore $\frac{1}{2}$, calcolando

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} \quad .$$

5. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x, y) = 2xy - x^2y^2$$

(3 punti) a. Trovare gradiente, Hessiano e punti critici.

(3 punti) b. Studiare la natura dei punti critici (motivare la risposta).

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2x + 3y$$

e i vincoli (per $\alpha \in (0, 1)$),

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad x^\alpha y^{1-\alpha} \leq 1,$$

Si consideri il problema di trovare massimo e minimo di f sotto i vincoli dati.

(1 punto) a. Dire se sono sempre soddisfatte o no le condizioni di qualificazione dei vincoli (motivare la risposta).

(1 punto) b. Scrivere il sistema di Kuhn-Tucker (KT) di tale problema.

(4 punti) d. Trovare gli eventuali punti stazionari vincolati quando $\alpha = \frac{1}{2}$. Studiare la natura di tali punti.