LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2010/2011

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 13/09/2011

1. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$, l'operatore $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 6a \\ 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$,

(3 punti) a. Determinare gli elementi del nucleo di $\hat{L}$ al variare di a.

(3 punti) b. Determinare i valori di a per cui $\mathbf{v}$ genera un sottospazio invariante di $\hat{L}$.

2. Data l'equazione alle differenze in $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$,

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinarne la soluzione passante per $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1 punti) c. Determinare il limite per $t \to \infty$ della soluzione trovata al punto precedente.

3. Data l'equazione differenziale $x''' - 2x'' + x' = 1 - 4e^{-t}$

(4 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Fissati $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ determinare la condizione iniziale per la derivata seconda, $x''(0)$, in modo che $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$.

4. Si consideri il sistema di equazioni nelle variabili (x, y, z) e nel parametro a

$$x^2 + y^2 = 2 - z^3 a^2$$

$$2x + y^2 = za$$

$$3x^2 z + y^2 = 1$$

(3 punti) a. Dopo aver verificato che, per $a = 1$ il sistema ha per soluzione il punto $(x, y, z) = (0, 1, 1)$, dimostrare che è possibile, in un intorno di tale punto, esprimere (x, y, z) come funzioni C^1 di a (le chiameremo $(x(a), y(a), z(a))$.

(3 punti) b. Calcolare $(x'(a), y'(a), z'(a))$.

5. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x,y) = -2x^2 - y^2 - 2xy \ln y$$

(3 punti) a. Trovare gradiente, Hessiano e punti critici.

(3 punti) b. Studiare, motivando la risposta, la natura dei punti critici (in caso ci siano punti di massimo/minimo locale, dire anche se essi sono globali).

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

e i vincoli

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

Si consideri il problema di trovare massimo e minimo di f sotto i vincoli dati.

(2 punti) a. Dire se sono sempre soddisfatte o no le condizioni di qualificazione dei vincoli (motivare la risposta).

(1 punto) b. Scrivere il sistema di Kuhn-Tucker (KT) di tale problema.

(4 punti) c. Trovare gli eventuali punti stazionari vincolati appartenenti alla regione

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x > 0, y > 0, z > 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

che è una porzione di frontiera della regione ammissibile.

(1 punto) d. Studiare infine la natura di tali punti.