

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”  
Prof. Fausto Gozzi e Dr. Davide Vergni

Esame del 13/09/2006

1. Data la matrice  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$  specificare sotto quali condizioni è diagonalizzabile. Diagonalizzarla mostrando autovalori e autovettori. Dimostrare che la matrice  $\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile simultaneamente alla matrice  $\hat{A}$  (simultaneamente significa utilizzando lo stesso cambiamento di base).

2. Data l'equazione differenziale  $x' = x^2$ , calcolarne i punti di equilibrio e discuterne la stabilità. Disegnare qualitativamente le curve integrali. Risolvere inoltre il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' &= x^2 \\ x(0) &= -1 \end{cases}$$

discutendo la corrispondenza tra la soluzione esatta e le curve qualitative.

3. Data l'equazione alle differenze non lineare in  $\mathbb{R}^2$ :  $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - x_n y_n \\ y_{n+1} = ay_n - x_n y_n \end{cases}$ , con  $a > 0$ , trovare i punti di equilibrio al variare di  $a$  e determinarne la stabilità.

4. Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con legge

$$f(\mathbf{x}) = e^{\|\mathbf{x} - (1,2)\|^2}.$$

Determinarne i punti critici e studiarne la natura.

5. Data la funzione di profitto  $\Pi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  con legge

$$\Pi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^\alpha + a(x_1 x_2)^\alpha - b(x_1 + x_2)$$

(con  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$  e  $a, b > 0$ ).

Trovare gradiente ed Hessiano di  $\Pi(\mathbf{x})$ .

Mostrare che esiste un unico punto critico  $\mathbf{x}_0$  a componenti strettamente positive.

Mostrare che le funzioni

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2)^\alpha \\ g(\mathbf{x}) &= a(x_1 x_2)^\alpha \end{aligned}$$

sono concave su  $\mathbb{R}_+^2$ . Dedurre che  $\Pi$  è concava.

Sapendo che esiste un punto critico  $\mathbf{x}_0$  a componenti strettamente positive, dire, giustificando la risposta, se esso è estrema.

Scrivere le condizioni necessarie di ottimalità per  $\Pi$  sulla regione

$$Q = \{x_1 x_2 \geq 1\}.$$

Facoltativo: trovare

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{x}_0)}{\partial a}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial a}.$$