

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”
 Prof. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 13/07/2009

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ -a & -1 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinare a in modo che $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartenga ad un sottospazio invariante per \hat{L} .

(3 punti) b. Fissato il valore di a precedentemente determinato, calcolare $\exp(\hat{L})$.

2. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione alle differenze: $x_{t+1} = \log\left(\frac{1}{x_t}\right)$.

(4 punti) a. Dimostrare l'esistenza di punti equilibrio studiandone la stabilità.

(2 punti) b. Tracciare il diagramma qualitativo delle traiettorie.

3. Siano $\mathcal{T} = [1, +\infty)$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} 2x + t^2 = tx' \\ x(1) = x_0 \end{cases}$.

(4 punti) a. Determinarne la soluzione al variare di x_0 .

(2 punti) b. Studiare il comportamento asintotico della soluzione (per $t \rightarrow +\infty$) al variare di x_0 e discutere esistenza ed unicità delle soluzioni.

4. Siano $X = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{T} = \mathbb{N}$. Sia data l'equazione alle differenze $\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$.

(2 punti) a. Scrivere la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio studiandone la stabilità.

(2 punti) c. Determinare la soluzione particolare relativa alla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x' = xy + x \\ y' = y + x^2 - 1. \end{cases}$$

(2 punti) a. Determinare le equazioni delle isocline e darne una rappresentazione grafica.

(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

(2 punti) c. Tracciare il diagramma di fase.