LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2006/2007

Corso di "Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 13/06/2007

1. Data la matrice $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ determinarne autovalori e autovettori.

   Determinare inoltre una matrice $\hat{B}$ che sia diagonalizzabile simultaneamente alla matrice $\hat{A}$, e che abbia come autovalori 0, 1 e 2 ("simultaneamente" significa utilizzando lo stesso cambiamento di base).

2. Data l'equazione alle differenze lineare e omogenea in $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}_n$, determinare per quale valore di a esiste un sottospazio invariante di punti di equilibrio. Determinare tale sottospazio e studiarne la stabilità. Inoltre, per tale valore di a, determinare la soluzione particolare dell'equazione passante al tempo $n = 0$ per $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Siano $X = \mathbb{R}_+$ e $\mathcal{T} = \mathbb{N}$. Si consideri il seguente modello di evoluzione per la densità di popolazione di insetti in anni successivi
$$x(t+1) = x(t)e^{-\frac{1}{3}x^3(t)+1}\,.$$
   Disegnare il grafico della dinamica, determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

4. Si consideri il sistema di equazioni differenziali
$$\begin{cases} x' = -2x + 32x^3 y \\ y' = -y + x^2. \end{cases}$$
   Calcolare i punti di equilibrio e studiarne la natura. Scrivere le equazioni delle isocline a tangente orizzontale e a tangente verticale e disegnarne il grafico. Dare una rappresentazione grafica delle traiettorie (ritratto di fase).

5. Sia $\mathcal{C}$ il triangolo di vertici
$$A = (-4, -3),\ B = (-1/2, -2),\ C = (-3, 2).$$
   - Disegnare il triangolo $\mathcal{C}$ e trovare le coordinate del punto x^0 di $\mathcal{C}$ con distanza minima dall'origine.
   - Calcolare la distanza δ di x^0 dall'origine, il vettore unitario $\mathbf{u}$ che punta dall'origine a x^0 e il punto medio m del segmento $\overline{Ox^0}$.
   - Scrivere l'equazione della retta che separa il triangolo $\mathcal{C}$ dall'origine.