

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”  
 Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 12/09/2007

1. Dati i vettori  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , determinare un terzo vettore  $\mathbf{w}$  in modo che la terna  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  possa formare una base di  $\mathbb{R}^3$  (specificando la condizione perché tre vettori formino una base in  $\mathbb{R}^3$ ).

Determinare la rappresentazione della matrice  $\hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  nella nuova base.

2. Siano  $X = \mathbb{R}_+$  e  $\mathcal{T} = [0, +\infty[$ . Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (1-t^2)x'(t) - tx(t) - 2tx^2(t) = 0 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Stabilire se la soluzione esiste su tutto  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  e motivare la risposta.

3. Data l'equazione alle differenze in  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{x}_{n+1} = \hat{A}\mathbf{x}_n$  con  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , determinarne

- i) la soluzione generale;
- ii) i punti di equilibrio e la loro stabilità;
- iii) il  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{A}^n \mathbf{x}_0$  per un generico  $\mathbf{x}_0$ ;
- iv) dire infine cosa cambia nella dinamica se considero l'equazione alle differenze  $\mathbf{x}_{n+1} = \hat{A}^2 \mathbf{x}_n$ .

4. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = xy - 2x^3 - x^2 + x \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

- Calcolare i punti di equilibrio e studiarne la natura.
- Scrivere le equazioni delle isocline a tangente orizzontale e a tangente verticale e disegnarne il grafico.
- Dare una rappresentazione grafica delle traiettorie (ritratto di fase).

5. Sia  $\mathcal{C}$  l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, xy \leq -1\}.$$

- Disegnare l'insieme  $\mathcal{C}$  e trovare le coordinate del punto  $x^0$  di  $\mathcal{C}$  con distanza minima dall'origine.
- Calcolare la distanza  $\delta$  di  $x^0$  dall'origine  $O$ , il vettore unitario  $\mathbf{u}$  che punta dall'origine a  $x^0$  e il punto medio  $m$  del segmento  $\overline{Ox^0}$ .
- Scrivere l'equazione della retta che separa strettamente l'insieme  $\mathcal{C}$  dall'origine.
- Disegnare un insieme convesso ma non chiuso tale che risulti disgiunto da  $\mathcal{C}$  e contenga l'origine.