

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”
 Prof. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 12/10/2009

1. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e la coppia di vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$

(2 punti) a. Determinare a in modo che $\mathbb{F} = (\mathbf{u} \ \mathbf{v})$ costituisca una base di \mathbb{V} .

(4 punti) b. Fissato un valore di a qualsiasi, trovare un operatore \hat{L} tale che $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\hat{L})$.

2. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$ e sia data la seguente equazione alle differenze: $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n + 1}}$

(2 punti) a. Dimostrare l'esistenza di punti di equilibrio.

(2 punti) b. Discuterne la stabilità.

(2 punti) c. Disegnare la dinamica con alcune curve di fase.

3. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ e $X = \mathbb{R}^2$. Si consideri l'equazione differenziale $\mathbf{x}'(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

(3 punti) a. Determinare al variare di a gli autovalori e gli autovettori della matrice \hat{A} .

(3 punti) b. Determinare la soluzione generale per $a = 1$.

4. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + 1.$$

(3 punti) 1. Determinare la soluzione generale.

(2 punti) 2. Determinare le soluzioni $x(t)$ che soddisfano $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$.

(1 punto) 3. Determinare la soluzione particolare corrispondente alla condizione iniziale $x(1) = 1/2$.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = y - x^2 \end{cases}.$$

(2 punti) a. Determinare le equazioni delle isocline e darne una rappresentazione grafica.

(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.

(2 punti) c. Dire se le curve integrali che partono dal quarto quadrante ($x > 0$, $y < 0$) sono destinate a lasciare questo quadrante.