LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2008/2009

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 12/01/2009

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, con $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ a+1 & -1 \end{pmatrix}$,

(2 punti) a. determinare i valori di a per cui $\hat{L}$ non possegga sottospazi invarianti reali.

(4 punti) b. Fissando un valore di a tra quelli determinati al punto precedente, calcolare $\hat{L}^t$, con $t \in \mathbb{N}$.

2. Sia $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Data la seguente equazione alle differenze: $x_{t+2} - 4x_t = t$

(4 punti) a. determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Trovare la soluzione passante per $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$.

3. Sia $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione differenziale: $x' = 1 - \dfrac{x+1}{x^3}$.

(2 punti) a. Determinarne i punti di equilibrio dimostrandone l'esistenza.

(2 punti) b. Disegnare il diagramma di fase (qualitativo).

(2 punti) c. Discutere esistenza, unicità ed esistenza globale delle soluzioni.

4. Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

(3 punti) a. determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x' = \ln\left(y^2\right) \\ y' = xy - x^3 \end{cases} .$$

(2 punti) a. Determinare le equazioni delle isocline e darne una rappresentazione grafica.

(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

(2 punti) c. Tracciare il diagramma di fase.