

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 11/07/2007

1. Date le matrici $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ determinare $e^{\hat{A}}$ ed $e^{\hat{B}}$.

Verificare inoltre che $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}}$.

2. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} = \mathbb{N} - \{0\}$. Scrivere la soluzione dell'equazione alle differenze

$$x(t+1) - \frac{x(t)}{a} = b,$$

(dove $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$) che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Dire quali sono i punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri a e b .

3. Siano $X = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $\mathcal{T} =]0, +\infty[$. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) - \frac{x(t)}{t} = t \sin t \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

4. Data l'equazione differenziale in \mathbb{R}^2 : $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$, determinarne

i) la soluzione generale;

ii) i punti di equilibrio e la loro stabilità;

iii) il diagramma di fase completo;

iv) la traiettoria che parte dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per $\mathbf{x} \geq 0$, dove A la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e \mathbf{b} un vettore di \mathbb{R}^2 .

- Disegnare il cono finito $C = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0\}$.
- Trovare almeno un vettore \mathbf{b} tale che il sistema ammette soluzione $\mathbf{x} \geq 0$.
- Si assuma che \mathbf{b} possa assumere i seguenti valori:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Per due di questi vettori \mathbf{b} , trova dei vettori \mathbf{y} che soddisfino

$$\mathbf{y}^T A \geq 0, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} = -60.$$