

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”
 Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 10/10/2007

1. Data l'equazione differenziale in \mathbb{R}^3 : $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$, determinarne la soluzione generale e i punti di equilibrio e la loro stabilità. Determinare inoltre al variare di a le soluzioni particolari con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$. Discutere, al variare di a , l'evoluzione delle traiettorie.

2. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione alle differenze

$$x(t+1) = 3x^3(t) - x^2(t) + 2x(t) + 1.$$

Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità. Abbozzare inoltre il grafico della dinamica.

3. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} =]0, +\infty[$. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) + \frac{x(t)}{t} = \sin t \\ x(\pi) = 0. \end{cases}$$

4. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = y^2 - xy^3 - 1 + xy \\ y' = 2x - y + 1. \end{cases}$$

- (a) Scrivere le equazioni delle isocline a tangente orizzontale e a tangente verticale e disegnarne il grafico.
 (b) Calcolare i punti di equilibrio e studiarne la natura.

5. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per $\mathbf{x} \geq 0$, dove A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e \mathbf{b} un vettore di \mathbb{R}^2 .

- (a) Disegnare il cono finito $C = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0\}$.
 (b) Trovare almeno un vettore \mathbf{b} tale che il sistema ammette soluzione $\mathbf{x} \geq 0$.
 (c) Si assuma che \mathbf{b} possa assumere i seguenti valori:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali vettori \mathbf{b} possibile trovare dei vettori \mathbf{y} che soddisfino

$$\mathbf{y}^T A \geq 0, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} = -10$$

e motivare la risposta.