

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”  
 Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 10/06/2011

1. Sia dato lo spazio vettoriale  $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$  e l'operatore  $\hat{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  tale che  $\hat{L} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

(3 punti) a. Determinare i valori di  $a$  per cui esistono solo due sottospazi invarianti indipendenti rispetto ad  $\hat{L}$ .

(3 punti) b. Fissato un valore di  $a$  tra quelli precedentemente determinati, calcolate  $e^{\hat{L}}$ .

2. Data l'equazione differenziale in  $\mathbb{R}^2$  :  $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$ ,

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Determinarne la soluzione particolare passante per  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(1 punti) c. Determinare il limite per  $t \rightarrow \infty$  della soluzione trovata al punto precedente.

3. Data l'equazione alle differenze:  $x_{t+2} - x_t = t$

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Trovare la traiettoria passante per i punti  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ .

(1 punti) c. Fattorizzare l'equazione alle differenze usando l'operatore di incremento temporale  $D$ .

4. Data la funzione di produzione  $F : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con legge

$$K(K_1, K_2, L) = 3(K_1 + 2K_2)^\alpha L$$

(4 punti) a. Consideriamo l'isoquanto

$$\{(K_1, K_2, L) \in \mathbb{R}_+^3, F(K_1, K_2, L) = 24\}$$

e il punto  $K_1 = 1, K_2 = 3/2, L = 1, \alpha = 1/2$  su tale isoquanto. Dire, motivando la risposta se è possibile applicare il teorema delle funzioni implicite e calcolare, in tale punto.

$$\frac{\partial K_1}{\partial L}, \quad \frac{\partial K_2}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial K_1}$$

5. Data la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con legge

$$f(x_1, x_2) = x_1(x_1^3 + x_2^3)$$

(2 punti) a. Trovare gradiente, Hessiano e punti critici.

(2 punti) b. Dire su quali insiemi  $f$  è concava o convessa (motivare la risposta).

(2 punti) c. Studiare la natura dei punti critici (motivare la risposta).

6. Data la funzione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con legge

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e i vincoli

$$x + y + z^2 \leq 2, \quad z^2 - y^2 \leq 2,$$

Si consideri il problema di trovare massimo e minimo di  $f$  sotto i vincoli dati.

(2 punti) a. Dire se sono sempre soddisfatte o no le condizioni di qualificazione dei vincoli (motivare la risposta).

(1 punto) b. Scrivere il sistema di Kuhn-Tucker di tale problema.

(1 punto) c. Trovare gli eventuali punti critici interni.

(4 punti) d. Trovare gli eventuali punti critici quando i due vincoli sono soddisfatti con l'uguaglianza.