

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”
Prof. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 09/02/2009

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$.
 - (3 punti) a. Determinare a in modo che il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sia una base per un sottospazio invariante di $\hat{L}$.
 - (1 punto) b. Definendo una nuova base, $\mathbb{F}$, formata dagli autovettori di $\hat{L}$, determinare le componenti del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ rispetto a tale base, $\mathbf{v}_{\mathbb{F}}$.
 - (2 punto) c. Calcolare la rappresentazione di $\mathbf{w} = \hat{L}\mathbf{v}$ nella base $\mathbb{F}$, $\mathbf{w}_{\mathbb{F}}$, senza utilizzare la formula $\mathbf{w}_{\mathbb{F}} = \hat{U}^{-1}\mathbf{w}$, dove $\hat{U}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathbb{F}$.

2. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Data la seguente equazione alle differenze: $x_{t+1} = x_t^3 - 2x_t^2 + 2x_t + 1$
 - (4 punti) a. determinarne i punti di equilibrio studiandone la stabilità;
 - (2 punti) b. tracciare il grafico della dinamica e il diagramma di fase (qualitativo).

3. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ e $X = \mathbb{R}$. Data la seguente equazione differenziale: $x'' - x = e^t + \sin t$,
 - (4 punti) a. determinarne la soluzione generale;
 - (2 punti) b. calcolare la soluzione particolare relativa ai dati iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$.

4. Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
 - (3 punti) a. determinarne la soluzione generale;
 - (3 punti) b. determinarne i punti di equilibrio studiandone la stabilità.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali non lineari: $\begin{cases} x' = 2y^3 + xy \\ y' = 2y^2 - x - 1 \end{cases}$.
 - (2 punti) a. Determinare le equazioni delle isocline e darne una rappresentazione grafica.
 - (2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.
 - (2 punti) c. Tracciare il diagramma di fase.