LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2008/2009

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 07/09/2009

1. Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$ e l'operatore $\hat{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(2 punti) a. Determinare a in modo che l'equazione $\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ abbia soluzioni non banali.

(4 punti) b. Trovare tali soluzioni (o, in altri termini, determinare $\mathrm{Ker}(\hat{L})$ al variare di a).

2. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$ e sia data la seguente equazione alle differenze: $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = n$.

(4 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(2 punti) b. Trovare la traiettoria passante per i punti $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

3. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione differenziale: $x' = a - x^2$.

(4 punti) a. Determinarne i punti di equilibrio al variare di a studiandone la stabilità.

(2 punti) b. Fissato a scelta un valore di a, discutere esistenza ed unucità locale e globale delle soluzione dell'equazione.

4. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ e $X = \mathbb{R}^2$. Si consideri l'equazione differenziale $\mathbf{x}'(t) = \hat{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

(3 punti) b. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) a. Determinarne i punti di equilibrio e la loro la natura.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x' = x^2 + y \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

(2 punti) a. Determinare le equazioni delle isocline e darne una rappresentazione grafica.

(2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

(2 punti) c. Tracciare il diagramma di fase.