

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 07/11/2007

1. Siano $X = \mathbb{R}^2$ e $T = \mathbb{R}$. Data l'equazione differenziale $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$, determinarne la soluzione generale al variare di a .

2. Siano $X = \mathbb{R}$ e $T = \mathbb{R}$. Scrivere l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \sin t.$$

3. Siano $X = \mathbb{R}$ e $T = [0, +\infty)$. Studiare qualitativamente le curve integrali dell'equazione

$$x'(t) = x^2 + \log x.$$

(Suggerimento: studiare la funzione $x^2 + \log x$)

4. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = y + x^2 - 2 \\ y' = y^2 - 4. \end{cases}$$

- (a) Scrivere le equazioni delle isocline a tangente orizzontale e a tangente verticale e disegnarne il grafico.
(b) Calcolare i punti di equilibrio e studiarne la natura.
(c) Dare una rappresentazione grafica delle traiettorie (ritratto di fase).

5. Sia \mathcal{C} l'insieme chiuso convesso determinato dall'intersezione del quadrilatero di vertici $A = (3, 1)$, $B = (0, 7)$, $C = (4, 7)$, $D = (7, 1)$ con la regione di piano

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 4x_2 \geq 10 - x_1\}.$$

- (a) Disegnare l'insieme \mathcal{C} e trovare le coordinate del punto x^0 di \mathcal{C} con distanza minima dall'origine.
(b) Calcolare la distanza δ di x^0 dall'origine, il vettore unitario \mathbf{u} che punta dall'origine a x^0 e il punto medio m del segmento $\overline{Ox^0}$.
(c) Scrivere l'equazione della retta che separa l'insieme \mathcal{C} dall'origine.