LUISS, Facoltà di Economia
Esame di Metodi Matematici per Economia e Finanza
del 06 Settembre 2012
Titolare prof. Fausto Gozzi, Assistente prof. Davide Vergni

Nome e cognome	Matricola	Canale

1 Prima parte

Esercizio 1.1 [3 punti] Dato un operatore $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ e due suoi autovettori indipendenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, discutere se, e sotto quali condizioni, anche la somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è autovettore di ϕ.

Soluzione:
Visto che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori indipendenti, in generale saranno associati a due autovalori distinti: $\phi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ e $\phi(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$ per cui in generale si avrà $\phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$.
Ma, perché $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sia autovettore dovrà essere $\phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, e questo si verifica se e solo se $\lambda = \mu = \alpha$, ossia $\lambda = \mu$ e quindi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devono essere associati allo stesso autovalore λ e questo è possibile se e solo se $\mathrm{mg}(\lambda) \geq 2$.

Esercizio 1.2 [3 punti] Date due matrici $\hat{A}$ e $\hat{B}$ ed un vettore $\mathbf{v}$, discutere sotto quali condizioni $\mathbf{v}$ appartiene al nucleo di entrambe le matrici.

Soluzione:
Se $\mathbf{v}$ appartiene al nucleo di $\hat{A}$ e di $\hat{B}$ sarà $\hat{A}\mathbf{v} = 0$ e $\hat{B}\mathbf{v} = 0$. Ma questo è possibile se e solo se $\mathbf{v}$ è autovettore sia di $\hat{A}$ che di $\hat{B}$ con autovalore associato pari a $\lambda = 0$.

Nome e cognome	Matricola	Canale

Esercizio 1.3

Dato l'operatore $\hat{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a+1 & 0 \end{pmatrix}$

(1 punti) a. esiste qualche valore di a per cui l'operatore $\hat{L}$ non è diagonalizzabile?

(2 punti) b. Escludendo eventualmente tali valori, diagonalizzare l'operatore.

(3 punti) c. Considerando il problema $\mathbf{x}' = \hat{L}\mathbf{x}$, determinare un valore di a ed una condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ tale che $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.

(1 punti) a. Perché $\hat{L}$ non sia diagonalizzabile bisogna avere o due autovalori coincidenti (con $\mathrm{mg}(\lambda) = 1$) o due autovalori complessi e coniugati. Quindi, calcolando gli autovalori:

$$\det(\hat{L}) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ a+1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a\lambda - a - 1 = 0 \quad \to \quad \lambda_{12} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4a+4}}{2}$$

Perché gli autovalori non siano reali e distinti si dovrà avere $\Delta = a^2 + 4a + 4 \leq 0$. Ma visto che $\Delta = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$ si ha che l'unico valore da escludere è $a = -2$.

(2 punti) b. Per $a \neq -2$ si ha $\lambda_{12} = \left(a \pm \sqrt{a^2+4a+4}\right)/2 = (a \pm a + 2)/2 = a+1, -1$.
Ricaviamo prima l'autovettore associato a $\lambda = a + 1$:

$$(\hat{L} - (a+1)\hat{I})\mathbf{v}_{a+1} = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a+1 & -a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \boxed{1} \\ a+1 & -a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to$$

$$y = x \to \mathbf{v}_{a+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ed ora occupiamoci dell'autovettore associato a $\lambda = -1$:

$$(\hat{L} + \hat{I})\mathbf{v}_{-1} = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & \boxed{1} \\ a+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to$$

$$y = -(a+1)x \to \mathbf{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a-1 \end{pmatrix}.$$

Per cui, la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\mathbb{E}$ alla base degli autovettori è

$$\hat{U} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{a+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{-1} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a-1 \end{pmatrix},$$

dalla quale, è possibile ricavare la diagonalizzazione per $\hat{L}$:

$$\hat{L}_D = \hat{U}^{-1}\hat{L}\hat{U} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3 punti) c. Perché una dinamica sia costante $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ è necessario che la condizione iniziale sia associata ad un autovalore pari a zero. Infatti, nel caso in esame di un sistema bidimensionale con autovalori reali e distinti, la soluzione generale è pari a: $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$, che, nel sistema in esame è pari a $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_{a+1}e^{(a+1)t} + c_2\mathbf{v}_{-1}e^{-t}$. Se $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ allora dovrà necessariamente essere $c_2 = 0$, $a = -1$ e $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_{a+1}$.

Nome e cognome	Matricola	Canale

Esercizio 1.4

Data l'equazione alle differenze: $x_{t+2} - 2ax_{t+1} + a^2 x_t = (-1)^t$

(4 punti) a. determinarne la soluzione generale al variare di a;

(2 punti) b. determinare quei valori di a per cui $\lim_{t\to\infty} x_t < +\infty$.

Svolgimento.

(4 punti) a. Iniziamo con il risolvere il problema omogeneo $x_{t+2} - 2ax_{t+1} + a^2 x_t = 0$ con equazione caratteristica $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$ che possiamo scrivere $(\lambda - a)^2 = 0$ ossia abbiamo un singolo autovalore $\lambda = a$ con molteplicità algebrica 2. Quindi la soluzione del problema omogeneo sarà

$$x_t = c_1 a^t + c_2 t a^t.$$

Per quanto riguarda il termine di non omogeneità, esso è associato all'operatore $\hat{L} = (D+1)$ e pertanto si distinguono due casi $a \neq -1$ e $a = -1$.
Caso $a \neq -1$
La soluzione particolare sarà $x_t^p = k(-1)^t$. Sostituendo tale espressione nell'equazione completa si ottiene:

$$k(-1)^t + 2ak(-1)^t + a^2 k(-1)^t = (-1)^t \qquad k = \frac{1}{(1+a)^2}\,.$$

Per cui si ha

$$x_t = c_1 a^t + c_1 t a^t + \frac{(-1)^t}{(1+a)^2}\,.$$

Caso $a = -1$
La soluzione particolare sarà $x_t^p = kt^2(-1)^t$. Sostituendo tale espressione nell'equazione completa si ottiene:

$$k(t+2)^2(-1)^t + 2ak(t+1)^2(-1)^t + a^2 k t^2 (-1)^t = (-1)^t \qquad k(t^2+4t+4) - 2k(t^2+2t+1) + kt^2 = 1 \qquad k = \frac{1}{3}\,.$$

Per cui si ha

$$x_t = \left(c_1 + c_2 t + \frac{1}{3}t^2\right)(-1)^t\,.$$

(2 punti) b. Date le soluzioni presentate, risulta evidente che perché $\lim_{t\to\infty} x_t < +\infty$ è necessario che $|a| < 1$.

Nome e cognome	Matricola	Canale

2 Seconda parte

Esercizio 2.1 [3 punti] Enunciare correttamente il teorema sulla derivazione di una composizione di due funzioni nel caso più generale possibile. Scrivere chiaramente e precisamente le ipotesi e le tesi.

Soluzione: Vedasi Teorema 0.29 delle dispense sul sito.

Esercizio 2.2 [3 punti] Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e una funzione $f : A \in \mathbb{R}$ continua su A e C^1 in ogni punto di Int$A$. Sia $x_0 \in \text{Int}A$ un punto stazionario per f.

a) Enunciare una condizione che implichi che x_0 sia punto di max globale per f su A.

b) Enunciare un'altra condizione (diversa dalla precedente) che implichi che x_0 sia punto di max globale per f su A.

c) Enunciare anche una condizione che implichi che x_0 non sia punto di max globale per f su A.

Soluzione:

a) Se A è aperto e convesso e f è concava su A, allora, per il Teorema 0.26 delle dispense sul sito, x_0 è punto di max globale per f su A.

b) Se A è chiuso e limitato (cioè compatto) di sicuro esiste il massimo ed esso va cercato tra i punti critici interni, i punti critici vincolati, i punti di non derivsabilità. Chiamiamo tutti questi punti candidati. Se ogni altro punto candidato ha valori minori o uguali a $f(x_0)$, allora x_0 è punto di max globale per f su A.

c) Se esiste una retta r contenuta in A tale che la funzione $g(t) = f|_r(t)$ abbia estremo superiore $+\infty$ (o semplicemente $> f(x_0)$), allora x_0 non è punto di max globale per f su A.

   Oppure: se f è C^2 in un intorno di x_0 e la matrice Hessiana di f in x_0 è semidefinita positiva o indefinita, allora x_0 non è punto di max globale per f su A.

Nome e cognome	Matricola	A.A.

Esercizio 2.3

a) **[2 punti]** Data la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di legge

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - e^{xy-a},$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, trovarne gradiente e matrice Hessiana. Mostrare poi che per $a = 1$ il punto $(x,y) = (1,1)$ è un punto critico di F. Idem per il punto $(x,y) = (0,0)$. Ve ne sono altri?

b) **[2 punti]** Si consideri ora F come funzione di (x,y,a) e si consideri il sistema $\nabla_{(x,y)}F(x,y,a) = \mathbf{0}$. Dire se in un intorno del punto $(x,y,a) = (1,1,1)$ è possibile esprimere localmente x e y in funzione di a in un intorno del punto $(1,1,1)$. Fare lo stesso per il punto $(x,y,a) = (0,0,1)$. Motivare le risposte.

c) **[2 punti]** Nel caso in cui la risposta sopra sia positiva trovare $x'(a)$ e $y'(a)$ per $a = 1$.

Svolgimento.

a) **[2 punti]** Innanzitutto calcoliamo

$$\nabla F(x,y) = \left(xy^2 - e^{xy-a}y, x^2y - e^{xy-a}x\right), \quad D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - e^{xy-a}y^2 & 2xy - e^{xy-a}(xy+1) \\ 2xy - e^{xy-a}(xy+1) & x^2 - e^{xy-a}x^2 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$\nabla F(x,y) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} xy^2 - e^{xy-a}y = 0 \\ x^2y - e^{xy-a}x = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y\left(xy - e^{xy-a}\right) = 0 \\ x\left(xy - e^{xy-a}\right) = 0 \end{cases}$$

Grazie alla legge di annullamento del prodotto le soluzioni di questo sistema sono il punto $(0,0)$ e tutti i punti (x,y) tali che $xy - e^{xy-a} = 0$. Quindi se $a = 1$ il punto $(x,y) = (1,1)$ è soluzione. Inoltre tutti i punti (x,y) tali che $xy = 1$ sono soluzione.

b) **[2 punti]** Consideriamo ora la funzione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$G(x,y,a) = \nabla_{(x,y)}F(x,y,a) = \begin{pmatrix} xy^2 - e^{xy-a}y \\ x^2y - e^{xy-a}x \end{pmatrix}$$

Per quanto visto sopra il sistema $G(x,y,a) = \mathbf{0}$ ha soluzione in $(x,y,a) = (1,1,1)$ in $(x,y,a) = (0,0,1)$. Per dire se è possibile esprimere localmente x e y in funzione di a in un intorno di questi punti usiamo il teorema delle funzioni implicite (TFI). Per questo calcoliamo, usano i risultati del punto a),

$$D_{(x,y)}G(x,y,a) = D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - e^{xy-a}y^2 & 2xy - e^{xy-a}(xy+1) \\ 2xy - e^{xy-a}(xy+1) & x^2 - e^{xy-a}x^2 \end{pmatrix}$$

Ne segue che

$$D_{(x,y)}G(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad D_{(x,y)}G(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-1} \\ e^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi grazie al TFI è possibile esprimere localmente x e y in funzione di a in un intorno di $(x,y,a) = (0,0,1)$ mentre non il TFI non dà risposte in un intorno di $(x,y,a) = (1,1,1)$

c) **[2 punti]** Prendiamo il punto $(x,y,a) = (0,0,1)$, caso in cui la risposta sopra è positiva. Grazie al TFI sappiamo che esistono due funzioni $x(a)$ e $y(a)$, definite (e C^1) per a appartenente ad un intorno I di 1, tali che

$$G\left(x(a), y(a), a\right) = 0 \qquad \forall a \in I$$

e

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(1)}{\partial a} \\ \\ \dfrac{\partial y(1)}{\partial a} \end{pmatrix} = -\left[D_{(x,y)}G\left(0,0,1\right)\right]^{-1} \cdot D_a G\left(0,0,1\right)$$

Dato che

$$\left[D_{(x,y)}G\left(0,0,1\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -e \\ \\ -e & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad D_a G\left(x,y,a\right) = \begin{pmatrix} e^{xy-a}y \\ \\ e^{xy-a}x \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(1)}{\partial a} \\ \\ \dfrac{\partial y(1)}{\partial a} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -e \\ \\ -e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nome e cognome	Matricola	A.A.

Esercizio 2.4

Dato il parametro $\beta \in (0,1)$ si consideri il problema di trovare i punti estremali locali e globali della funzione

$$f(x,y,z) = 2x^\beta + 3y^\beta + 4z^\beta$$

sotto i vincoli (dipendenti dal parametro $a > 0$)

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0, \qquad x + 2y + 3z \leq a.$$

Si consideri il problema di trovare max e min globali di f sotto tali vincoli.

a) **[1 punto]** Controllare che le CQ siano soddisfatte

b) **[1 punto]** Scrivere, ove possibile, il sistema delle condizioni necessarie.

c) **[3 punti]** Trovare i punti stazionari vincolati.

d) **[2 punti]** Trovare gli estremali globali.

Svolgimento.

a. Le funzioni vincolari sono

$$g_1(x,y,z) = -x, \qquad g_2(x,y,z) = -y, \qquad g_3(x,y,z) = -z, \qquad g_4(x,y,z) = x + 2y + 3z - a,$$

I loro gradienti sono

$$\nabla g_1(x,y,z) = (-1,0,0), \qquad \nabla g_2(x,y,z) = (0,-1,0), \qquad \nabla g_3(x,y,z) = (0,0,-1), \qquad \nabla g_4(x,y,z) = (1,2,3).$$

Controlliamo se le condizioni di qualificazione dei vincoli (CQ) sono soddisfatte.

- Nel caso in cui si annulla un solo vincolo occorre che il gradiente di ciascuna funzione g_i ($i = 1,2,3,4$) sia non nullo sui punti in cui vale l'uguaglianza. Ciò è sicuramente vero in quanto sono tutti costanti e non nulli.
- Nel caso in cui si annullano solo due vincoli occorre che i gradienti dei due vincoli che si annullano siano LI. Dato che i quattro gradienti sono costanti e a due a due LI, le CQ sono soddisfatte.
- Nel caso in cui si annullano esattamente tre vincoli occorre che i corrispondenti gradienti siano LI. Anche qui notiamo che i quattro gradienti sono costanti e a tre a tre LI, quindi le CQ sono soddisfatte.
- Infine i quattro vincoli non si annullano mai tutti insieme. Infatti i primi tre si annullano insieme solo nell'origine che però non annulla il quarto vincolo, essendo $a > 0$.

Da quanto detto sopra segue che le CQ sono sempre soddisfatte per il nostro problema.

b. Notiamo che f è C^1 all'interno di $\mathbb{R}^3_+$ ma non sul bordo di tale ortante positivo. Quindi il sistema di KT si può scrivere solo all'interno della regione e sulla parte di frontiera delimitata dal quarto vincolo. Dato che $\nabla f(x,y) = (2\beta x^{\beta-1}, 3\beta y^{\beta-1}, 4\beta z^{\beta-1})$, il sistema delle condizioni necessarie è

$$\begin{cases} 2\beta x^{\beta-1} = \lambda_4 \\ 3\beta y^{\beta-1} = 2\lambda_4 \\ 4\beta z^{\beta-1} = 3\lambda_4 \\ \\ \lambda_4(x+2y+3z-a) = 0 \\ \\ x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \\ x+2y+3z \leq a \end{cases} \tag{1}$$

con l'ulteriore vincolo sul segno del moltiplicatore λ_4 che dovrà essere non negativo per la ricerca dei punti di massimo e non positivo per la ricerca dei punti di minimo.

I punti della regione per cui si annulla almeno uno dei primi tre vincoli saranno tutti candidati ad essere estremali.

c. Osserviamo innanzitutto che il gradiente di f non si annulla in alcun punto interno alla regione. Restano da trovare i punti stazionari dove si annulla il quarto vincolo. Per trovare tali punti stazionari vincolati occorre risolvere il sistema (che è un caso particolare di quello scritto al punto (b) qui sopra):

$$\begin{cases} 2\beta x^{\beta-1} = \lambda_4 \\ 3\beta y^{\beta-1} = 2\lambda_4 \\ 4\beta z^{\beta-1} = 3\lambda_4 \\ \\ x+2y+3z = a \\ \\ x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Dalle prime tre equazioni si ricava che

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{2\beta\lambda_4}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \\ \\ y = \left(\frac{2}{3\beta\lambda_4}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \\ \\ z = \left(\frac{3}{4\beta\lambda_4}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \end{cases}$$

Sostituendo nella quarta si ha

$$\left(\frac{1}{2\beta\lambda_4}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + 2\left(\frac{2}{3\beta\lambda_4}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + 3\left(\frac{3}{4\beta\lambda_4}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} = a$$

Da cui

$$\left(\frac{1}{\lambda_4}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \cdot \left(\left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + 2\left(\frac{2}{3\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + 3\left(\frac{3}{4\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right) = a$$

quindi, chiamando

$$C(a,\beta) = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + 2\left(\frac{2}{3\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + 3\left(\frac{3}{4\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right]$$

si ha

$$\lambda_4 = C(a, \beta)^{\beta - 1}$$

Sostituendo nelle prime tre equazioni troviamo allora il punto critico vincolato

$$\begin{cases} x = C(a,\beta)\left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \\ \\ y = C(a,\beta)\left(\frac{2}{3\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \\ \\ z = C(a,\beta)\left(\frac{3}{4\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \end{cases}$$

d. Osserviamo innanzitutto che la regione è compatta (chiusa perché contiene tutta la sua frontiera, dato che le disuguaglianze vincolari sono tutte larghe, limitata perché è contenuta in una palla di raggio 5 e centro l'origine). Quindi esistono di sicuro massimo e minimo grazie al teorema di Weierstrass. Il punti trovato è di massimo globale dato che il moltiplicatore è positivo e la funzione f è concava sulla regione.

Per quanto rigiuarda il minimo globale si osserva che $f(x, y, z) \geq 0$ per ogni (x, y, z) nella regione e che $f(0, 0, 0) = 0$. Ne segue che l'origine è punto di minimo globale.