LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2009/2010

Corso di "Metodi Matematici per la Finanza"
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni

Esame scritto del 5/10/2010

1. Sia dato l'operatore $\hat{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2 punti) a. Determinare il valore di a per cui il nucleo di $\hat{L}$ abbia dimensione 2.

(2 punti) b. Per tale valore di a determinare il nucleo di $\hat{L}$.

(2 punti) c. Per tale valore di a calcolare $\hat{L}^n$.

2. Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}' = \hat{A}\mathbf{x}$, con $\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 punti) a. Determinarne la soluzione generale.

(3 punti) b. Determinarne i punti di equilibrio discutendone la stabilità.

3. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x} + 1$ si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(2 punti) a. Disegnare la dinamica $f(x)$ e dimostrare l'esistenza di punti di equilibrio.

(4 punti) a. Determinare i punti di equilibrio discutendone la stabilità.

4. Data la funzione $f(t, x) = \frac{x}{t} + a$ (con $a \in \mathbb{R}$), si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(1) = x_0 > 0 \end{cases}$.

(4 punti) a. Trovare la soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(2 punti) b. Fissato una valore per x_0 determinare la soluzione particolare al variare di a e determinare il limite della soluzione per $t \to \infty$.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x'(t) = ax^3(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) = ax(t) + y(t) \end{cases}$$

(2 punti) a. Fissato $a = 1$ disegnare le isocline $x' = 0$ e $y' = 0$.

(2 punti) b. Trovare i punti di equilibrio al variare del parametro a.

(2 punti) c. Discutere la loro stabilità.