

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”
 Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 05/02/2008

1. Siano $X = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. Data l'equazione alle differenze $\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$,
determinarne la soluzione \mathbf{x}_n tale che $\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Siano $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{T} = [0, +\infty)$. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = e^{4t} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

3. Siano $X = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{T} = [0, +\infty)$. Data l'equazione differenziale $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$, determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità al variare di a . Dare inoltre la soluzione generale in caso di presenza di infiniti punti di equilibrio.

4. Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x + y^2 \\ y' = x^2 - y^2. \end{cases}$$

- (a) Scrivere le equazioni delle isocline a tangente orizzontale e a tangente verticale e disegnarne il grafico.
 (b) Calcolare i punti di equilibrio e studiarne la natura.
 (c) Dare una rappresentazione grafica delle traiettorie (ritratto di fase).

5. Sia \mathcal{C} l'insieme

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -\frac{1}{2}, xy \leq -2 \right\}.$$

- (a) Disegnare l'insieme \mathcal{C} , stabilire se si tratta di un insieme chiuso e trovare le coordinate del punto x^0 di \mathcal{C} con distanza minima dall'origine.
 (b) Calcolare la distanza δ di x^0 dall'origine, il vettore unitario \mathbf{u} che punta dall'origine a x^0 e il punto medio m del segmento $\overline{Ox^0}$.
 (c) Scrivere l'equazione della retta che separa l'insieme \mathcal{C} dall'origine.