

Corso di “Metodi Matematici per la Finanza”  
Prof. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 02/03/2009

1. Sia dato lo spazio vettoriale  $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^3$  e i vettori  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (2 punti) a. Trovare un terzo vettore,  $\mathbf{w}$ , tale che la terna  $\mathbb{F} = (\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})$  formi una base per  $\mathbb{V}$  e tale che, se  $\hat{U}$  è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica  $\mathbb{E}$  alla nuova base  $\mathbb{F}$ , si abbia  $\det(\hat{U}) = 1$ .
- (2 punti) b. Costruire una matrice  $\hat{A}$  che abbia come autovettori proprio i vettori della terna  $\mathbb{F}$ .
- (2 punti) c. Determinare un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$  tale che  $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ . Ne esiste più d'uno? Argomentare la risposta.

2. Siano  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$  e  $X = \mathbb{R}$ . Data la seguente equazione alle differenze:  $x_{t+1} = e^{x_t} - 5x_t$

- (4 punti) a. determinarne i punti di equilibrio studiandone la stabilità;
- (2 punti) b. tracciare il grafico della dinamica e il diagramma di fase qualitativo (per alcune condizioni iniziali).

3. Siano  $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$  e  $X = \mathbb{R}$ . Data la seguente equazione differenziale:  $x' = x^2 - ax + 1$ ,

- (3 punti) a. determinarne al variare di  $a$  i punti di equilibrio studiandone la stabilità;
- (2 punti) b. fissato un valore di  $a$  tra quelli che ammettono punti di equilibrio, tracciare il diagramma di fase;
- (1 punto) c. discutere se esistenza e/o unicità locale e globale di soluzioni dell'equazione dipendono da  $a$ .

4. Data l'equazione differenziale in  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

- (2 punti) a. determinarne la soluzione generale;
- (2 punti) b. calcolare i punti di equilibrio studiandone la stabilità;
- (2 punti) a. determinare la soluzione particolare passante per  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  commentando il risultato.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali non lineari:  $\begin{cases} x' = xy \\ y' = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$ .

- (2 punti) a. Determinare le equazioni delle isocline e darne una rappresentazione grafica.
- (2 punti) b. Determinare i punti di equilibrio studiandone la stabilità.
- (2 punti) c. Tracciare il diagramma di fase.