



LUISS
Laurea specialistica in Economia e Finanza
Anno Accademico 2007/2008

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 01/07/2008 - Foglio 1

1. Sia $X \equiv \mathbb{R}^3$ uno spazio vettoriale, e sia $\hat{L} : X \rightarrow X$ un operatore lineare con $\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Definiamo “nucleo” di $\hat{L}$ (e lo indicheremo con $\text{Ker}(\hat{L})$) l'insieme dei vettori di X tali che $\hat{L}\mathbf{x} = 0$.

- (2 punti) a. Dimostrare che $\text{Ker}(\hat{L}) = \{\mathbf{x} \in X \mid \hat{L}\mathbf{x} = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di X .
(2 punti) b. Determinare, al variare di a , la dimensione di $\text{Ker}(\hat{L})$.
(2 punti) c. Sempre al variare di a determinare tutti i vettori $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\hat{L})$.

2. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}^2$. Si consideri il seguente sistema lineare di equazioni differenziali:

$$\mathbf{x}'(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t) \quad \text{dove} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (4 punti) a. Determinare la soluzione generale, i punti di equilibrio e la loro stabilità.
(2 punti) b. Determinare la soluzione particolare con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Si consideri la seguente equazione alle differenze:

$$x(t+1) = \frac{1}{x(t)}.$$

- (3 punti) a. Discutere l'esistenza di punti di equilibrio determinandone la stabilità.
(2 punti) b. Indicata con f la dinamica, calcolare l'iterata seconda f^2 .
(1 punto) c. Determinare le orbite di periodo due discutendone la stabilità.

Corso di “Metodi Matematici per le Scienze Economiche e Finanziarie”
Prof. Fausto Gozzi, Dr. Davide Vergni, Dr.ssa Alessandra Cretarola

Esame scritto del 01/07/2008 - Foglio 2

4. Si consideri il sistema lineare $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per $\mathbf{x} \geq 0$, dove $\hat{A} = \begin{bmatrix} -3/2 & 4 & 2 \\ -3 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b}$ è un vettore di $\mathbb{R}^2$.

(1 punto) a. Disegnare il cono finito $C = \{\hat{A}\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0\}$.

(2 punti) b. Trovare almeno un vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ tale che il sistema ammetta soluzione $\mathbf{x} \geq 0$.

(2 punti) c. Assumendo per $\mathbf{b}$ i seguenti valori:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3/2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

stabilire, motivando la risposta, per quali di questi valori sia possibile trovare dei vettori $\mathbf{y}$ che soddisfino

$$\mathbf{y}^T \hat{A} \geq 0, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} = -6. \quad (1)$$

(1 punto) d. Per un vettore $\mathbf{b}$ a scelta tra quelli selezionati al punto c), determinare almeno un vettore $\mathbf{y}$ che soddisfi la condizione (1).

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = 3x - y^2 \\ y' = \exp(x + y) - 1. \end{cases}$$

(4 punti) a. Determinarne i punti di equilibrio, studiandone la stabilità e la natura.

(2 punti) b. Determinarne le isocline e tracciare il diagramma di fase.

6. Siano $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+$ e $X = \mathbb{R}$. Si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} x' = -x^3 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(4 punti) a. Determinarne la soluzione al variare di x_0 .

(2 punti) b. Studiare il comportamento asintotico della soluzione (per $t \rightarrow +\infty$) e discuterne il legame con la possibile presenza di punti di equilibrio dell'equazione differenziale.