Premessa: Uso dei simboli [,] e [±].
Questi simboli di uso corrente possono significare la congiunzione logica "e" o la congiunzione logica "o" a seconda delle circostanze. Per esempio:

- La scrittura $k = 0, 1$ significa: $k = 0$ oppure $k = 1$.
- La scrittura $k \neq 0, 1$ significa: $k \neq 0$ e $k \neq 1$.
- La scrittura $k = \pm 1$ significa: $k = -1$ oppure $k = 1$.
- La scrittura $k \neq \pm 1$ significa: $k \neq -1$ e $k \neq 1$.

---

101. a. Scriviamo la matrice, usiamo come pivot per la prima incognita il numero incorniciato e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

L'ultima equazione è proporzionale alla seconda e può essere eliminata. Il sistema è ridotto, ha due pivot e quindi ha $\underline{\infty^1 \text{ soluzioni}}$ dipendenti dall'incognita non pivotale z.
Per determinarle, riduciamo totalmente la matrice:

$$R_2 \to -1/2\, R_2 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad R_1 \to R_1 - R_2 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Il sistema è: $\begin{cases} x + z/2 = 1/2 \\ y - (3/2)z = 1/2 \end{cases}$ da cui le soluzioni: $\left(\dfrac{1-z}{2}\,,\ \dfrac{1+3z}{2}\,,\ z\right)$ $(z \in \mathbb{R})$

101. b. Scriviamo la matrice, usiamo come pivot per la prima incognita il numero incorniciato e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + (1/2)R_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3/2} & 3/2 \end{array}\right)$$

Il sistema è ridotto, ha i 3 pivot incorniciati e quindi ha $\underline{\infty^1 \text{ soluzioni}}$ dipendenti dall'incognita non pivotale z.
Riduciamo totalmente iniziando con $R_3 \to 2/3\, R_3$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{R_2 \to (-1/4)R_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$$

Pertanto le soluzioni sono: $\left(\dfrac{z}{2}\,,\ \dfrac{z}{2}\,,\ z\,,\ 1\right)$

101. c. La matrice dei coefficienti è una matrice 3×4 e, dato che l'incognita x ha tutti i coefficienti nulli, la riduciamo usando come primo pivot a_{22}:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Eliminando l'ultima riga, proporzionale alla seconda, il sistema è ridotto con due pivot ed ha quindi $\underline{\infty^2 \text{ soluzioni}}$ dipendenti dalle incognite non pivotali x e z. Si ricavano subito $t = 1/2$ e la y in funzione di z. Le soluzioni sono $(x\,,\ z\,,\ z\,,\ 1/2)$
Evidentemente l'incognita t dev'essere pivotale e, dato che si ha la relazione $y = z$, allora y e z non possono essere contemporaneamente non pivotali. Quindi l'unico altro modo di scrivere le soluzioni del sistema è quello di scegliere come incognite non pivotali x e y e scrivere quindi le soluzioni come $(x\,,\ y\,,\ y\,,\ 1/2)$.

101. d. Scriviamo la matrice del sistema; per ridurla occorre innanzitutto uno scambio di righe perché a_{11} è nullo e non può essere pivot. Possiamo eseguire $R_1 \leftrightarrow R_2$ e poi continuare:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

La seconda e la terza riga sono identiche, la quarta è proporzionale alla seconda, *ma solo per i coefficienti* e non per il termine noto, quindi il sistema <u>non ha soluzioni</u>. D'altra parte con $R_4 \to R_4 - 2R_2$ si otterrebbe l'equazione $0 = -2$.

101. e. La matrice del sistema si riduce con una sola operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - 3R_1 \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta con 4 pivot e il sistema ha quindi <u>∞^1 soluzioni</u> dipendenti dall'incognita non pivotale u. Le soluzioni si ricavano subito e sono: $\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ u-1\ ,\ 7-u\ ,\ u\right)$

101. f. Per ridurre la matrice occorrono uno scambio di righe e un'altra operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \\ \updownarrow \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) R_3 \ \to\ R_3 - 2R_1 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Eliminando l'ultima equazione che è proporzionale alla seconda, il sistema è ridotto, ha due pivot e quindi ha <u>∞^2 soluzioni</u> dipendenti dalle incognite non pivotali y e t. Le soluzioni si possono quindi scrivere come: $(2-2y-t\ ,\ y\ ,\ 1-2t\ ,\ t)$.

È possibile usare ogni coppia di incognite, come incognite non pivotali tranne la coppia z, t, dato che si ha la relazione $z = 1 - 2t$. Le soluzioni si possono scrivere quindi in altri 4 modi usando le altre possibili coppie di incognite non pivotali:

$$\left(-2y + \frac{3+z}{2}\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ \frac{1-z}{2}\right) \quad \text{con } y, z \qquad \left(x\ ,\ \frac{2-x-t}{2}\ ,\ 1-2t\ ,\ t\right) \quad \text{con } x, t$$

$$\left(x\ ,\ \frac{3+z}{4} - \frac{x}{2}\ ,\ z\ ,\ \frac{1-z}{2}\right) \quad \text{con } x, z \qquad (x\ ,\ y\ ,\ -3+2x+4y\ ,\ 2-x-2y) \quad \text{con } x, y$$

102. a. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo gaussiano standard, cosa possibile in quanto nessuno dei coefficienti dipende da k:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & k \end{array}\right) \underset{\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - (1/2)R_1 \\ R_3 \to R_3 - (1/2)R_1 \end{array}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & k-1/2 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 + R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

Risulta subito chiaro che, <u>se $k \neq 1$</u> il sistema <u>non ha soluzioni</u>, mentre, <u>se $k = 1$</u>, il sistema ha due pivot e quindi <u>∞^1 soluzioni</u>.

102. b. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo standard di Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & k^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & k^2-2 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & k^2-1 \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta con 3 pivot, qualunque valore assuma il parametro k, quindi il sistema ha *sempre* <u>una e una sola soluzione</u>.

102. c. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo standard di Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k^2 & 2 & k+k^2 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k^2-2 & 1 & k+k^2-1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - (k^2-1)R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \end{array}\right)$$

Se $k^2 - 1 \neq 0$, se cioè <u>$k \neq \pm 1$</u>, la matrice è ridotta con 3 pivot e il sistema ha quindi <u>una e una sola soluzione</u>.

Se $k=1$, l'ultima riga è $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k=-1$, l'ultima riga è $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, quindi il sistema è ridotto con due pivot e ha quindi ∞^1 soluzioni.

103. a. Se $k \neq 0, 1, -1$, allora k , k^2-1 , $k+1$ sono pivot e il sistema è chiaramente ridotto.

Se $k=0$, la matrice è
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
e non è ridotta.

Se $k=1$, la matrice è
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
e non è ridotta.

Se $k=-1$, la matrice è
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
ed è ridotta.

In conclusione il sistema è ridotto per ogni $k \neq 0, 1$.
Se $k \neq 0, 1, -1$ il sistema è ridotto, non ha un'equazione del tipo $0=1$ e ha tre pivot non nulli: $k^2, k^2-1, k+1$, per cui ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale t e si trovano facilmente per sostituzione a partire dall'ultima equazione:
$$\left(\frac{1+t-2kt}{k^2}+\frac{1+(1-k)t}{k^2(k^2-1)}\ ,\ \frac{-1+(k-1)t}{k^2-1}\ ,\ (1-k)t\ ,\ t\right)$$
Se $k=0$, riducendo con $R_2 \to R_2+R_1$ e $R_3 \to R_3+R_2$ si ottiene la matrice a lato. Il sistema è ora ridotto, non ha un'equazione del tipo $0=1$ e ha due pivot quindi ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali x e t e sono: $(x\ ,\ 1+t\ ,\ t\ ,\ t)$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Se $k=1$, le due ultime equazioni del sistema sono : $\{z=-1\ ;\ 2z=0\}$. Il sistema è chiaramente incompatibile e non ha soluzioni.
Se $k=-1$ il sistema è ridotto, ha due pivot, non ha un'equazione del tipo $0=1$ per cui ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y e t e sono $(-y-t-1\ ,\ y\ ,\ -1\ ,\ t)$

Conclusione:	Se $k \neq 0, 1, -1$	∞^1 soluzioni
	Se $k=0$ o $k=-1$	∞^2 soluzioni
	Se $k=1$	nessuna soluzione

103. b. Riduciamo la matrice completa del sistema mediante l'algoritmo di Gauss.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+3 & k+3 & 1 \\ k & 1 & 2 & k^2 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \to R_2-R_1 \\ R_3 \to R_3-R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-1 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array}\right)$$
Se eliminiamo R_4 che coincide con R_2, il sistema è ridotto purché $k \neq 0$, $k+1 \neq 0$, $k^2-1 \neq 0$, cioè $k \neq 0, 1, -1$.
Per $k \neq 0, 1, -1$ il sistema ha tre equazioni significative e quindi ∞^1 soluzioni che si possono trovare con le seguenti operazioni:
$R_3 \to R_3/(k+1)$ (possibile perché $k \neq -1$), da cui $t = 1/(k-1)$. Sostituendo questo valore in R_2 si ottiene: $z = -3/(k^2-1)$. L'incognita y è non pivotale, per cui rimane come parametro libero. Sostituendo i valori trovati di y, z, t in R_1 si ottiene infine: $x = \dfrac{-(k^2-1)y+5-k}{k(k^2-1)}$.

Quindi le soluzioni per $k \neq 0, 1, -1$ sono: $\left(\dfrac{-(k^2-1)y+5-k}{k(k^2-1)}\ ,\ y\ ,\ \dfrac{-3}{k^2-1}\ ,\ \dfrac{1}{k-1}\right)$

Esaminiamo ora i casi particolari:

Se $k=0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ È chiaro che il sistema è ridotto con x incognita non pivotale per cui ci sono ∞^1 soluzioni che si ricavano facilmente: $(x\ ,\ -5\ ,\ 3\ ,\ -1)$.

Se $k=1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ Il sistema è ridotto e, dato che l'ultima equazione è $0 \cdot t = 2$, allora non ha soluzioni.

Se $k=-1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Il sistema è ridotto e ha solo due righe significative, pertanto ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y, z e sono: $(-y-2z-1\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ 1)$

103. c. Evidentemente, se $k-1 \neq 0$, il sistema non è ridotto. Mentre se $k=1$ il sistema lo è. Un'operazione elementare che si può eseguire per qualunque $k \in \mathbb{R}$ è $R_3 \to R_3 - (k-1)R_2$. La matrice completa del sistema è in questo caso quella a lato.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-4 & 2-k & 1 \end{array}\right)$$

Se i due numeri k, k^2-4 sono diversi da 0, cioè se $k \neq 0, 2, -2$, la matrice è ridotta con tre pivot: $k, 1, k^2-4$.
Quindi per $k \neq 0, 2, -2$ (anche per $k=1$) il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale t. Le soluzioni si ricavano facilmente dal sistema ridotto:

$$\begin{cases} kx + y + 2t & = 1 \\ y + 2t & = 0 \\ (k^2-4)z + (2-k)t & = 1 \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{k}\ ,\ -2t\ ,\ \frac{1-(2-k)t}{k^2-4}\ ,\ t\right)$$

Sostituendo uno alla volta i tre valori esclusi $k = 0, 2, -2$, si vede subito che il sistema è ridotto anche per $k=2$ e per $k=-2$, ma non per $k=0$.
<u>Se $k=2$</u> il sistema <u>non ha soluzioni</u> perché l'ultima riga è $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 1)$

<u>Se $k=-2$</u> la matrice è quella a lato. È ridotta, ha tre pivot e <u>quindi</u> il sistema ha <u>∞^1 soluzioni</u> dipendenti dall'incognita non pivotale z. Le soluzioni sono immediate e sono: $\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ z\ ,\ \frac{1}{4}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Sostituiamo ora $k=0$ e continuiamo la riduzione:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Il sistema è ora ridotto ed evidentemente <u>non ha soluzioni</u>.

In conclusione: Per $k = 0, 2$ non ha soluzioni, per gli altri k ne ha ∞^1.

104. a. Scriviamo la matrice. Per ridurla conviene innanzitutto scambiare le due righe in modo da avere un pivot non dipendente da k.

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & -1 & 1 \\ 1 & -4k & 2 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4k & 2 \\ k & -1 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - kR_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4k & 2 \\ 0 & 4k^2-1 & 1-2k \end{array}\right)$$

<u>Se $4k^2-1 \neq 0$</u>, se cioè $k \neq \pm 1/2$, allora la matrice è ridotta e ha due pivot, quindi il sistema ha <u>una soluzione</u>.
<u>Se $k=1/2$</u> l'ultima riga è $(0 \quad 0 \mid 0)$ e quindi il sistema ha <u>∞^1 soluzioni</u> dipendenti dall'incognita non pivotale y.
<u>Se $k=-1/2$</u> l'ultima riga è $(0 \quad 0 \mid 2)$ e quindi il sistema <u>non ha soluzioni</u>.

104. b. Scriviamo la matrice. L'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si può sempre fare, anche se $k=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 1 \\ k & -1 & k & -1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 & -2 \end{array}\right)$$

<u>Se $k \neq 0$</u> la matrice è ridotta con due pivot e il sistema ha quindi <u>∞^1 soluzioni</u> dipendenti dall'incognita non pivotale z.
<u>Se $k=0$</u> la matrice non è ridotta, ma la si riduce subito con $R_2 \to R_2 + 2R_1$. L'ultima riga diventa $(0 \quad 0 \quad -1 \mid 2)$, quindi la matrice è ridotta con due pivot. Il sistema ha quindi <u>∞^1 soluzioni</u> dipendenti però dall'incognita non pivotale x.
In conclusione il sistema ha <u>sempre ∞^1 soluzioni</u>.

104. c. Scriviamo la matrice. L'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si può sempre fare, anche se $k=0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 2k & k \\ k & 1 & 1-k \end{array}\right) R_2 \to R_2 - R_1 \left(\begin{array}{cc|c} k & 2k & k \\ 0 & 1-2k & 1-2k \end{array}\right)$$

Se $k \neq 0, 1/2$ la matrice è ridotta con due pivot e il sistema ha quindi <u>una soluzione</u>.
Se $k=0$ il sistema si riduce all'unica equazione $y=1$ e ha quindi le <u>∞^1 soluzioni</u> $(x, 1)$.
Se $k = 1/2$ l'ultima equazione è non significativa, il sistema si riduce all'unica equazione $(1/2)x + y = 1/2$ e ha quindi <u>∞^1 soluzioni</u> dipendenti dall'incognita non pivotale y.

In conclusione il sistema ha ∞^1 soluzioni se $k = 0, 1/2$, altrimenti ne ha una.

105. a. Dato che tutti i coefficienti dell'incognita x dipendono da k, conviene scambiare l'ordine delle incognite in modo da semplificare l'algoritmo gaussiano.

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1 \\ 1+k & 1 & k \\ 3-k & 0 & 2k-1 \end{array}\right) \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 1 & 1+k & k \\ 0 & 3-k & 2k-1 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 3-k & 2k-1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - (3-k)R_2}{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & k^2-4 \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta con 2 pivot, indipendenti da k, ma a causa dell'ultima equazione, ha soluzioni (ne ha una sola) solo se $k = \pm 2$.
Osserviamo che, dovendola trovare, occorre tener conto che la prima incognita è ora la y e la seconda è la x.

105. b. Anche qui, dato che tutti i coefficienti dell'incognita x dipendono da k, può convenire scambiare l'incognita x con la z. Occorrerà poi scambiare due righe per avere un pivot non nullo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 1 \\ 2 & k+1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k & 4 \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & k & 4 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 2-k & k-2 & 3 \end{array}\right)$$

Mediante l'operazione elementare $R_3 \to R_3 - (2-k)R_2$ la matrice diventa quella lato. Dato che l'elemento a_{33} si annulla per $k = 2, -1$, allora:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k^2-k-2 & k+1 \end{array}\right)$$

<u>Se $k \neq 2, -1$</u> la matrice è ridotta con tre pivot quindi il sistema ha una soluzione.
<u>Se $k = 2$</u>, l'ultima riga diventa $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 3)$, e quindi il sistema non ha soluzioni.
<u>Se $k = -1$</u>, l'ultima riga diventa $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 0)$, la matrice è ridotta con due pivot e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale x (e non z, ricordiamo che c'è stato uno scambio di colonne). Conclusione:
Se $k \neq 2, -1$ 1 soluzione Se $k = 2$ nessuna soluzione Se $k = -1$ ∞^1 soluzioni

105. c. Per ridurre la matrice conviene innanzitutto scambiare R_1 con R_2 in modo da avere un pivot non dipendente da k.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & k+1 & 0 \\ -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & -k \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ k & -1 & k+1 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & -k \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 + kR_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & k+1 & k \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 & 1-k \end{array}\right)$$

Ora conviene eseguire $R_2 \leftrightarrow R_3$ in modo da semplificare la successiva operazione elementare.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & k+1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 & 1-k \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - (k+1)R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 & -1 \\ 0 & 0 & k-3 & -k \end{array}\right)$$

A questo punto può non convenire più ridurre del tutto la matrice, ma confrontare invece le ultime due equazioni che si scrivono (se $k \neq -1, 3$) : $\left\{ z = \dfrac{1}{k+1} \ ; \ z = \dfrac{-k}{k-3} \right\}$. Perché ci siano soluzioni quindi è necessario che $\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{-k}{k-3}$, cioè che $k^2 + 2k - 3 = 0$ ovvero $k = -3, 1$. Se k non è uno di questi due valori, il sistema è comunque senza soluzioni (anche se $k = -1$ o $k = 3$, come si verifica subito). Restano da esaminare i due casi $k = -3, 1$:

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Se $k = -3$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente una soluzione.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

Riassumendo: Se $k \neq 1, -3$ non c'è nessuna soluzione, se $k = 1$ ci sono ∞^1 soluzioni, se $k = -3$ c'è una soluzione.

106. a. Basta ridurre la matrice dei coefficienti, iniziando con uno scambio di righe per evitare che il pivot dipenda da k.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - kR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & k & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - kR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & -3+k^2 \end{pmatrix}$$

I pivot sono due se $k^2 \neq 3$ e sono tre in caso contrario, quindi:
Se $k = \pm\sqrt{3}$ ci sono ∞^1 soluzioni non banali, altrimenti c'è solo la soluzione banale.

b. Riduciamo iniziando con uno scambio di righe per evitare che il pivot dipenda da k.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_2}{\overset{R_1}{\updownarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - kR_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3+k & 2 & -k \end{pmatrix}$$

È possibile proseguire la riduzione, ma si può anche notare che $R_4 = R_2 + R_3$, per cui R_4 può essere eliminata. Dato che ci sono meno di quattro pivot, allora c'è sempre almeno un'incognita non pivotale, quindi il sistema ha sempre almeno ∞^1 soluzioni e quindi anche soluzioni non banali. Per sapere anche quante sono, scambiamo R_2 con R_3. Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - \frac{1+k}{2} R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (1-k)/2 & (3-k)/2 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 1$ allora ci sono tre pivot, se $k = 1$ anche , quindi il sistema ha sempre ∞^1 soluzioni.

c. Il sistema ha sempre soluzioni non banali perché non può avere più di due pivot e quindi ci sono almeno 5 incognite non pivotali. Per sapere quante sono riduciamo la matrice con $R_2 \to R_2 - kR_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & 1-k & 1-k & -2+2k & 1-k & 1-k \end{pmatrix}$$

Se $k^2 \neq 1$, allora ci sono 2 pivot.
Se $k = -1$, ci sono sempre 2 pivot.
Se $k = 1$, la seconda riga è nulla e c'è un'unico pivot.
In conclusione: se $k = 1$ ci sono ∞^6 soluzioni, se $k \neq 1$ ce ne sono ∞^5.

107. Riduciamo la matrice completa con $R_3 \to R_3 - R_2$: $\left(\begin{array}{cccc|c} ab & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(b-1) & 0 & b-a \end{array}\right)$

Quindi se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $b \neq 1$ e $b \neq -1$, il sistema è ridotto con tre pivot e ha una soluzione.

Esaminiamo il caso $a = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$

A causa dell'ultima equazione il sistema può aver soluzioni solo se $b = 0$. Ma, se $b = 0$, sono incompatibili le prime due. Quindi per $a = 0$ il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

Esaminiamo ora il caso $b = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 & -a \end{array}\right)$. Se $a = 1$, le prime due equazioni sono identiche. Eliminandone una, il sistema è ridotto, con due pivot, quindi ha ∞^2 soluzioni. Se invece $a \neq 1$ le prime due equazioni sono incompatibili e il sistema non ha soluzioni.

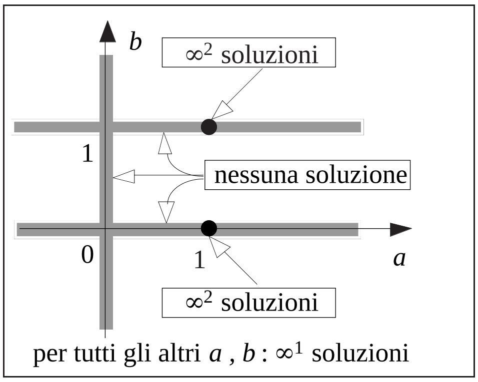
Esaminiamo ora il caso $b = 1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{array}\right)$

Se $a \neq 0$, il sistema è ridotto, ma, a causa dell'ultima equazione, non ha soluzioni, tranne che nel caso $a = 1$, per cui è ridotto con due pivot e ha quindi ∞^2 soluzioni.
Se $a = 0$, non è ridotto, ma, come abbiamo già visto, non ha soluzioni.

Esaminiamo ora il caso $b = -1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a & 0 & -1-a \end{array}\right)$$

Se $a \neq 0$, con $R_2 \leftrightarrow R_3$ diventa ridotta con tre pivot e il sistema ha perciò ∞^1 soluzioni.
Se $a = 0$, come abbiamo già visto, il sistema non ha soluzioni.
La situazione può essere schematizzata nel disegno al lato nel piano cartesiano $[a, b]$, in cui per ogni coppia di valori (a, b) è segnata la situazione.



Per quanto riguarda l'ultima domanda, come si vede:

- Se $a = 0$ il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.
- Se $a = 1$ il sistema ha sempre soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

E questi sono gli unici valori di a che soddisfino i criteri richiesti.

111.

	A	B	C	D	E	F
A	no	no	sì	sì	no	no
B	sì	sì	no	no	sì	no
C	no	no	sì	sì	no	no
D	no	no	no	no	no	no
E	no	no	no	no	no	sì
F	sì	sì	no	no	sì	no

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 13 & 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \quad B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} C \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C \cdot D = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 7 & 9 \\ 9 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad F \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad F \cdot E = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

112. a. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Falso. Controesempio: A e B come in a.

c. Falso. Controesempio: Se $A \cdot B = B$, allora $A \cdot B - B = 0$ che si può scrivere $A \cdot B - I \cdot B = 0$ cioè $(A - I) \cdot B = 0$. Basta quindi determinare due matrici non nulle il cui prodotto sia 0. Per esempio quelle di a.
Scegliamo quindi $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, cioè $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Allora $A \cdot B = B$ e ovviamente A non è la matrice identica.

d. Vero. Come è noto, la somma è commutativa.

e. Vero. È la distributività del prodotto rispetto alla somma.

f. Falso. Controesempio: A e B come in a. e $C = 0$.

g. Vero. Basta aggiungere $-A$ ad entrambi i membri dell'equazione.

h. Vero. È una semplice verifica immediata.

i. Vero. Infatti: $A \cdot A^2 = A \cdot (A \cdot A) = (A \cdot A) \cdot A = A^2 \cdot A$.

j. Falso. Controesempio: A e B come in a. , dato che $(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$ e $A \cdot B \neq B \cdot A$.

k. Falso. Dato che $(A \cdot B)^2 = A \cdot B \cdot A \cdot B = A \cdot (B \cdot A) \cdot B$, mentre $A^2 B^2 = A \cdot A \cdot B \cdot B = A \cdot (A \cdot B) \cdot B$. Occorre quindi scegliere due matrici A e B tali che $A \cdot B \neq B \cdot A$. Le due matrici del caso a, però non vanno bene, perché $A \cdot B = 0$ e quindi si ha l'identità. Però scambiandole e scegliendo quindi le due matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ si ha, come si verifica eseguendo i prodotti, un controesempio.

l. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

m. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

n. Vero. Infatti, in questo caso A è l'inversa di sé stessa.

o. Falso. Controesempio: A e B come in a. , dato che $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - A\cdot B + B\cdot A + B^2$ e $A \cdot B \neq B \cdot A$.

p. Vero. Infatti $(A+I)\cdot(A-I) = A^2 - A\cdot I + I\cdot A + I^2$ e, diversamente dal caso precedente, A e I commutano.

113. a. Vero. Infatti: $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

b. Falso. Controesempio: $A = I$ e $B = -I$.

c. Vero. Se infatti $A\cdot B = A\cdot C$, allora $A^{-1}\cdot A\cdot B = A^{-1}\cdot A\cdot C$ da cui $B = C$.

d. Falso. Per esempio:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Allora: $(A\cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1}\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e. Falso. Controesempio: A e B come in d.

f. Falso. Si ha:
$$(A^{-1}BA)^5 = \overbrace{(A^{-1}BA)\cdots(A^{-1}BA)}^{5\text{ volte}} = A^{-1}B(A\cdot A^{-1})B(A\cdot A^{-1})\cdots BA =$$
$$= A^{-1}BB\cdots BA = A^{-1}B^5A.$$
Se fosse $(A^{-1}BA)^5 = A^{-5}B^5A^5$ si avrebbe quindi $A^{-1}B^5A = A^{-5}B^5A^5$. Moltiplicando a sinistra per A^5 e a destra per A^{-1} si ottiene:
$A^5\cdot A^{-1}B^5\cdot A\cdot A^{-1} = A^5\cdot A^{-5}\cdot B^5\cdot A^5\cdot A^{-1}$ da cui $A^4\cdot B^5 = B^5A^4$.
Per avere un controesempio, bastano quindi due matrici A e B tali che A^4 e B^5 non commutino, per esempio A e B come in d.

g. Vero. Per la dimostrazione confronta f.

h. Vero. Infatti A e B^{-1} sono invertibili e il prodotto di matrici invertibili è invertibile.

i. Falso. Come controesempio scegliamo A e B come in d. e poniamo $C = A\cdot B$. Allora si ha che $B = A^{-1}\cdot C$, mentre $C\cdot A^{-1} = A\cdot B\cdot A^{-1}$ che è diversa da B.

j. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

114. a. Se A è invertibile, si possono moltiplicare entrambi i membri dell'equazione a sinistra per A^{-1} e si ottiene:
$A^{-1}AX = A^{-1}B$, da cui $\quad X = A^{-1}\cdot B$
Se A non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B.

b. Raccogliamo X a destra del primo membro: $(A+I)\cdot X = B$. Se $A+I$ è invertibile, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per $(A+I)^{-1}$ e si ottiene: $\quad X = (A+I)^{-1}B$
Se $A+I$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B.

c. Raccogliamo X a destra del primo membro: $(A+B)\cdot X = C$. Se $A+B$ è invertibile, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per $(A+B)^{-1}$ e si ottiene: $\quad X = (A+B)^{-1}C$
Se $A+B$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A, B e C.

d. Portiamo B a secondo membro e raccogliamo A a sinistra del primo membro:
$$A\cdot(XA+XB) = I - B.$$
Possiamo ancora raccogliere X a sinistra dell'espressione in parentesi e ottenere
$$A\cdot X\cdot(A+B) = I - B.$$
Se A e $A+B$ sono invertibili, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per A^{-1} e a destra per $(A+B)^{-1}$ e ottenere $\quad X = A^{-1}(I-B)(A+B)^{-1}$.
Se A non è invertibile o $A+B$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B.

e. Sapendo che $A \cdot X + X \cdot B = C$, qualunque tentativo di moltiplicare a destra o a sinistra per A^{-1} o B^{-1} o $(A+B)^{-1}$ non riesce a isolare la matrice X a primo membro, per cui non è possibile dare matricialmente una espressione elementare per X senza conoscere A e B, né dare condizioni affinché l'equazione abbia soluzioni.

f. Anche qui qualunque tentativo di isolare la matrice X a primo membro, fallisce, per cui non è possibile dare matricialmente un'espressione elementare per X senza conoscere A e B.

115. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$ La matrice è nulla se, simultaneamente $\{a^2+bc=0\ ;\ ab+bd=0\ ;\ ac+dc=0\ ;\ bc+d^2=0\}$.
Conviene, innanzitutto esaminare la seconda equazione: $(a+d)b = 0$ dalla quale si deducono due possibilità:

- $b = 0$, nel qual caso dalle altre si trova subito $a = 0$ e $d = 0$ (nessuna condizione su c).

Quindi le matrici del tipo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ sono tra quelle cercate.

- $a + d = 0$, nel qual caso dalle altre si trova solo $a^2 + bc = 0$. Quindi anche le matrici del

tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + bc = 0$ sono tra quelle cercate.

In definitiva, tenendo presente che tra le matrici del secondo tipo rientrano anche quelle del primo tipo, si conclude sinteticamente che:
Le matrici cercate sono tutte e sole quelle del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + bc = 0$.

116. Per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

117. a. Se esistesse A^{-1} si avrebbe $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0$ da cui $B = 0$.

b. Il sistema omogeneo $A \cdot x = 0$ ha almeno una soluzione non nulla b, dato che $\varrho(A) < n$. Poniamo quindi $B = (b \mid b \mid \cdots \mid b)$. Allora $B \neq 0$ e $A \cdot B = 0$.

118. A Calcoliamo A^{-1} riducendo A e contemporaneamente I mediante l'algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \\ \updownarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_1 \to R_1 - 3R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

B La matrice B è a blocchi: basta invertire i singoli blocchi con l'algoritmo standard.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & -5/12 & 1/2 & 5/12 \\ 0 & 0 & 5/24 & -1/4 & 7/24 \end{pmatrix}$$

C La matrice C è quasi diagonale. La si riduce a I dividendo ogni riga per l'elemento della diagonale. Per completare la riduzione occorre $R_1 \to R_1 - 5R_5$ Le stesse operazioni su I forniscono subito l'inversa.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

D La matrice è antidiagonale. Per ridurla occorre scambiare l'ordine delle righe e dividere ogni riga per il pivot. L'inversa è una matrice antdiagonale però con gli elementi scambiati e invertiti.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E Matrice anti-a blocchi. Generalizzazione del caso precedente: si invertono e si scambiano i singoli blocchi

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

119. a. Vera. È semplicemente il teorema di Binet.

b. Falsa. Controesempio: $A = I$ e $B = I$. Allora $\det(A + B) = \det(2I) = 2^n$, mentre $\det(A) + \det(B) = \det(I) + \det(I) = 2$. Se $n \neq 1$ sono diversi.

c. Vera. Infatti $1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ e quindi $1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$.

d. Vera. Infatti $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(B)$ (è possibile lo scambio perché ora si tratta di numeri e non di matrici). Dato che $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ (vedi problema precedente), si ottiene $\det(B)$.

e. Vera. Infatti $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$.

f. Falsa. Infatti $-A$ si ottiene moltiplicando ciascuna delle n righe di A per -1, quindi il suo determinante è il determinante di A moltiplicato per $(-1)^n$. Quindi, se n è pari e $\det(A) \neq 0$, allora $\det(A) = \det(-A)$ e quindi sono differenti. Se però n è dispari l'affermazione è vera.

120. A Si può osservare che $C_1 + C_3 = 2C_2$; questo implica che $\det(A) = 0$

B Sviluppiamo successivamente lungo R_3, R_2, R_3, C_1:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 7 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 2 = 280$$

C La matrice è a blocchi: il determinante è il prodotto dei determinanti dei singoli blocchi. Dato che il secondo blocco ha determinante nullo, allora $\det(C) = 0$.

D La matrice è triangolare superiore a blocchi: gli elementi sopra i tre blocchi non intervengono nel calcolo del determinante, quindi :

$$\det(D) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

E Basta sottrarre R_2 da R_1 e proseguire:

$$\det(E) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 12 & 12 & 13 & 87 \\ 3 & -3 & 9 & 0 & 81 \\ 7 & 8 & -2 & 9 & 65 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 13 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

Cerchiamo di azzerare l'ultima riga: $C_1 \to C_1 - C_4$, $C_2 \to C_2 + C_4$, $C_3 \to C_3 - 3C_4$

$$= 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 25 & -27 & 13 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ -2 & 17 & -29 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 25 & -27 \\ 3 & -3 & 9 \\ -2 & 17 & -29 \end{pmatrix} =$$

Cerchiamo di azzerare la seconda riga: $C_3 \to C_3 - 3C_1$, $C_2 \to C_2 + C_1$

$$= 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 13 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 15 & -23 \end{pmatrix} = 9 \cdot (-3) \cdot \Big((-12) \cdot (-23) - 9 \cdot (-2) \Big) = 11718$$

131. a. Dato che la matrice completa è quadrata, conviene innanzitutto calcolarne il determinante, facilitandoci il compito tramite qualche operazione elementare sulle righe e sulle colonne.

$$\det \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 2 & 1+k & 2 \\ 2-k^2 & 1 & k+2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_2}{=} \det \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & 1+k & 3+k \\ 2-k^2 & 1 & 3+k \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_3}{=} \det \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k^2 & k & 0 \\ 2-k^2 & 1 & 3+k \end{pmatrix} =$$

$= (3 + k) \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ k^2 & k \end{pmatrix} = 0$. Quindi il determinante è nullo qualunque sia $k \in \mathbb{R}$.

In conclusione la matrice completa ha sempre caratteristica minore di 3; occorre quindi esaminare la caratteristica della matrice dei coefficienti:

La sottomatrice formata da R_1, R_2, C_1, C_2 ha determinante $\det \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 1+k \end{pmatrix} = k^2 + k - 2$ che si annulla per $k = 1, -2$. Quindi

Se $k \neq 1, -2$, allora $\varrho(A) = 2$ e di conseguenza anche $\varrho(A\,|\,b) = 2$ e quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k = 1$ o $k = -2$, le ultime due righe sono rispettivamente $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ e $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$
Quindi in entrambi i casi il sistema non ha soluzioni.

131. b. Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti iniziando col calcolo del suo determinante.

$$\det\begin{pmatrix} k+1 & 4 & -(1+k) \\ k^2 & k+1 & -k \\ -k & 1-3k & k^2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_1}{=} \det\begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k^2 & k+1 & k^2-k \\ -k & 1-3k & k^2-k \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_3}{=} \det\begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k^2+k & 4k & 0 \\ -k & 1-3k & k^2-k \end{pmatrix}$$

Il determinante è 0 per ogni k. Quindi $\varrho(A) \leq 2$ per ogni k.
Può convenire ora calcolare il determinante di una sottomatrice 3×3 della matrice completa per esempio di quello costituito con C_1, C_2, C_4

$$\det\begin{pmatrix} k+1 & 4 & 1 \\ k^2 & k+1 & 1 \\ -k & 1-3k & 1 \end{pmatrix} = k + 2k^2 - 3k^3 \text{ ed è nullo per } k = 0, 1, -1/3.$$

Se $k \neq 0, 1, -1/3$, la matrice completa ha quindi caratteristica 3, mentre quella dei coefficienti ha caratteristica ≤ 2, per cui il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 0$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema non ha evidentemente soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Se $k = -1/3$ occorre ridurre la matrice dei coefficienti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2 & 1/9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - (1/6)R_1 \\ R_3 \to R_3 - (1/2)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 4/9 & 5/6 \\ 0 & 0 & 4/9 & 1/2 \end{array}\right)$$

Quindi anche per $k = -1/3$, il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 0$, il sistema ha ∞^1 soluzioni, se $k \neq 0$, non ne ha.

131. c. Conviene innanzitutto calcolare il determinante della matrice completa, sviluppandolo lungo l'ultima colonna (quella dei termini noti):

$$\det\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ k-1 & k & 2 & 2k \\ 4 & 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix} = 2k \cdot \det\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = 2k(2k^2 - 6k)$$

Il determinante si annulla quindi per $k = 0, 3$. Per valori diversi da $k = 0$ e $k = 3$, quindi $\varrho(A \,|\, b) = 4$, mentre $\varrho(A) \leq 3$ e il sistema non ha soluzioni.
Se $k = 0$, il sistema è omogeneo e, mediante semplici operazioni elementari, si vede che ha tre pivot, quindi l'unica soluzione banale.
Se $k = 3$, sempre mediante semplici operazioni elementari, si vede che compare un'equazione incompatibile, per cui il sistema non ha soluzioni.
Conclusione: Se $k = 0$, il sistema ha una soluzione, se $k \neq 0$, non ne ha.

132. Come pivot per la prima colonna va bene 3, quindi iniziamo la riduzione eseguendo le operazioni elementari $R_3 \to R_3 - (1/3)R_1$ e $R_4 \to R_4 - (2/3)R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k-1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & k-2/3 & k \end{array}\right)$$

4 va bene come pivot per la seconda colonna quindi: $R_3 \to R_3 - (1/4)R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-7/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & k-2/3 & k \end{array}\right)$$

A questo punto la riduzione mediante massimo pivot non è più possibile (dipende da a) né conveniente, per cui calcoliamo $\det(A)$ (A matrice dei coefficienti):
$\det(A) = 3 \cdot 4 \cdot ((k - 7/12)(k - 2/3) - 5/36) = 12k^2 - 15k + 3$. Pertanto se $k \neq 1$ e $k \neq 1/4$, allora $\det(A) \neq 0$, il sistema è di Cramer e ammette una e una sola soluzione.

Se $k=1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) R_4 \to R_4 - (5/4)R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Il sistema è ridotto, ha tre incognite pivotali e quindi ∞^1 soluzioni.

Se $k=1/4$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/12 & 1/4 \end{array}\right) R_4 \to R_4 + R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right).$

Il sistema è ridotto e evidentemente non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k=1$: ∞^1 soluzioni.
Se $k=1/4$: nessuna soluzione.
In tutti gli altri casi una e una sola soluzione.

133. a. Riduciamo la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - kR_1}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1+k-2k^2 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 + R_2}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 2-2k^2 \end{array}\right)$$

Gli elementi della diagonale si annullano per $k=1$ e per $k=-2$. Quindi:
Se $k \neq 1, -2$, la matrice è ridotta con tre pivot e il sistema ha una soluzione.
Se $k=1$, le ultime due righe sono nulle e quindi il sistema ha un pivot e ∞^2 soluzioni.
Se $k=-2$, l'ultima riga è $(0 \quad 0 \quad 0 \mid -6)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

133. b. Il minore incorniciato della matrice dei coefficienti è nullo per $k=0,1$. Quindi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k^2-k+1 & \boxed{\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ -2 & k^2-k \end{array}} & & 1 \\ 1 & & & k \end{array}\right)$$

Se $k \neq 0,1$, allora $\varrho(A)=2$ e di conseguenza anche $\varrho(A \mid b)=2$ e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k=0$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema non ha evidentemente soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $k=1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^2 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

133. c. Scriviamo la matrice e iniziamo l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k-1 & -1 \\ k & 3 & k+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - (k/2)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & -1 & -2 \\ k & 3-k^2/2 & k+1-k/2 \end{array}\right)$$

La seconda e la terza equazione si possono scrivere come $\{y=k\ ;\ y=2\}$, quindi:
Se $k \neq 2$ il sistema non ha soluzioni.
Se $k=2$, le tre ultime equazioni sono proporzionali e quindi il sistema ha una soluzione.

133. d. Guardando la matrice completa del sistema, si vede che è più semplice, creare degli zeri nella terza colonna invece che nella prima, mediante operazioni elementari. Per questo non è neanche necessario scambiare le colonne:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ -1 & k & -1 & 1 \\ k-2 & 2k-1 & -1 & k^2 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1-k \\ 2k-2 & 2k-2 & 0 & k^2-k \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{} \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k-2 \end{array}\right)$$

Se $k \neq -2, 1$, il sistema non ha soluzioni, perché il termine noto k^2+k-2 è $\neq 0$.

Se $k=-2$, le matrici completa e incompleta hanno caratteristica 2 perché è non nullo il minore inquadrato, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & \boxed{-1} & \boxed{1} & 2 \\ -3 & \boxed{-3} & \boxed{0} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $k=1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^2 soluzioni.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

133. e. Usiamo come primo pivot quello incorniciato di R_3 che non dipende da k:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 & k & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \\ \updownarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1-2k^2 & k & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-2k & 1 & 1 \end{array}\right)$$
Scambiamo ora due righe per usare il pivot inquadrato che non dipende da k.
$$\begin{array}{c} R_2 \\ \updownarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1-2k^2 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-2k & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - kR_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2k^2-k & 0 & 2-k \\ 0 & 0 & 1-2k & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Le due ultime equazioni sono $\begin{cases} (1-2k^2-k)\,z = 2-k \\ (1-2k)\,z = \ \ 0 \end{cases}$

Il coefficiente $1-2k^2-k$ si annulla per $k=-1, 1/2$ e il coefficiente $1-2k$ per $k=1/2$.

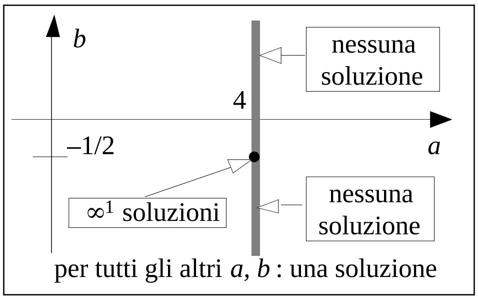
Se $k \neq -1, 1/2$, allora le due ultime equazioni sono $\left\{ z = \dfrac{2-k}{1-2k^2-k} \ ; \ z=0 \right\}$, quindi occorre che sia $k=2$, altrimenti non ci sono soluzioni.

Se $k=2$, le ultime due righe sono $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$, la matrice è ridotta e il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k=-1$, la terza riga è $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 1)$, quindi il sistema non ha soluzioni.
Se $k=1/2$, la terza riga è $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 3/2)$, quindi il sistema non ha soluzioni.
Conclusione: Se $k=2$, il sistema ha ∞^1 soluzioni, se $k \neq 2$, non ne ha.

133. f. Effettuiamo qualche operazione elementare sulle righe della matrice completa:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 2k+1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ k & k & -k & k \end{array}\right) R_4 \to R_4 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2k+1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \\ \updownarrow \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2k+1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array}\right)$$
$$R_2 \to R_2 - kR_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & 1 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right)$$
Quindi perché il sistema abbia soluzioni occorre che $k=0$ e contemporaneamente $k-1=0$.
Questo non è possibile, quindi:
Il sistema non ha soluzioni per alcun $k \in \mathbb{R}$

134. a. Si può iniziare con l'algoritmo gaussiano:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & b \\ -4 & a & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + 4R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & a+8 & -4 & 6 \end{array}\right)$$
A questo punto è possibile calcolare il determinante della matrice dei coefficienti che è $4-a$.
Di conseguenza, se $a \neq 4$, il sistema è di Cramer e ha un'unica soluzione, qualunque sia b.
Se $a=4$, riduciamo ulteriormente la matrice:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & 12 & -4 & 6 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + 4R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 4b+2 \end{array}\right)$$



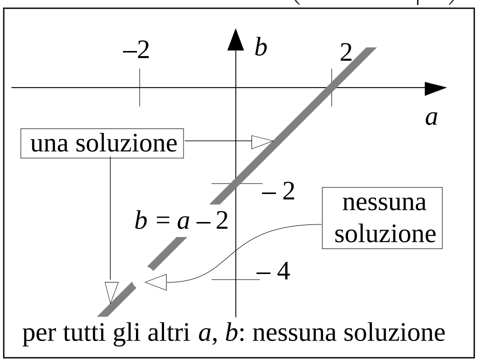
Quindi il sistema ha soluzioni e ne ha ∞^1, solo se $b = -1/2$.
In conclusione:
Se $a \neq 4$: una soluzione.
Se $a = 4$ e $b \neq -1/2$: nessuna soluzione.
Se $a = 4$ e $b = -1/2$: ∞^1 soluzioni.
La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.

134. b. Iniziamo l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & b & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & b-2a & -1 \end{array}\right)$$

A questo punto conviene calcolare il determinante della matrice completa.

Si ha: $\det(A\,|\,b) = a - b - 2$.
Se questo determinante è diverso da 0, cosa che accade se $b \neq a - 2$, allora il sistema non ha soluzioni, perché $\varrho(A\,|\,b) = 3$, mentre $\varrho(A) \leq 2$.
Vediamo ora cosa succede se $b = a - 2$. Sostituendo b, la terza equazione è proporzionale alla seconda e può essere trascurata, quindi la matrice del sistema è $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \end{array}\right)$.



È quindi chiaro che se $a \neq -2$, la matrice è ridotta e il sistema ha una soluzione, mentre, se $a = -2$ (e quindi $b = -4$), l'ultima equazione è incompatibile.
In conclusione:
Se $b \neq a - 2$: nessuna soluzione.
Se $b = a - 2$ e $a \neq -2$: una soluzione.
Se $a = -2$ e $b = -4$: nessuna soluzione.
La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.

134. c. Conviene creare degli zeri nella seconda colonna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & 1 \\ -1 & b & 0 & 1 \\ 2 & b & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & 1 \\ -1-a & 0 & 1 & 0 \\ 2-a & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

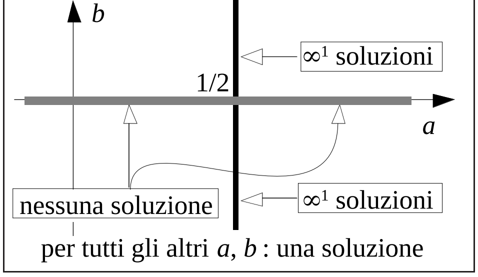
A questo punto conviene calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

Si ha: $\det(A) = b \cdot (2a - 1)$.
Se questo determinante è diverso da 0, cosa che accade se $a \neq 1/2$ e $b \neq 0$, allora il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & b & -1 & 1 \\ -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & -1 & 1 \\ -1-a & 0 & 1 & 0 \\ 2-a & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Se $a = 1/2$, l' ultima riga può essere trascurata e la matrice ha caratteristica 2 per ogni b, perché è non nullo il minore inquadrato, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.
Se $b = 0$, la matrice dei coefficienti ha caratteristica sempre 2 perché è non nullo il minore inquadrato.
L'unico minore significativo di ordine 3 della matrice completa (quello formato da C_1, C_3, C_4) ha determinante $2a - 1$.



Pertanto, se $a \neq 1/2$ (e sempre $b = 0$), allora $\varrho A\,|\,b) = 3$ e il sistema non ha soluzioni, mentre se $a = 1/2$ ne ha ∞^1, come già visto sopra.
In conclusione:
Se $a \neq 1/2$ e $b \neq 0$: una soluzione.
Se $a = 1/2$: ∞^1 soluzioni per ogni b.
Se $a \neq 1/2$ e $b = 0$: nessuna soluzione.
La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.

134. d. Conviene creare degli zeri nella colonna C_2 che non dipende da parametri:

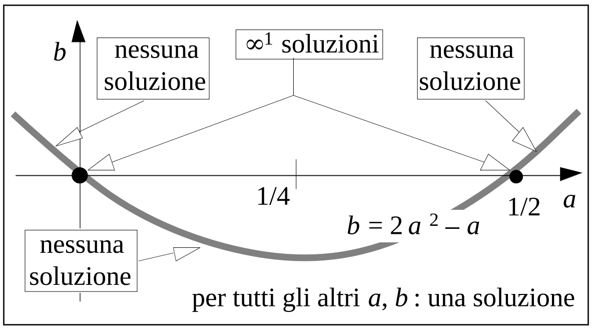
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ b & 0 & a & a \\ a-1 & -1 & 0 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1-2a & 0 & -1 & -2a \\ b & 0 & a & a \\ \hline 2a-1 & 0 & 1 & 2a \end{array}\right)$$

L'ultima riga può essere trascurata in quanto proporzionale alla seconda. Il determinante della matrice dei coefficienti è $a - 2a^2 + b$, quindi:
Se $b \neq 2a^2 - a$ il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.
Se $b = 2a^2 - a$ sostituiamo b (dato che è difficile esplicitare a dall'equazione $b = 2a^2 - a$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & & a \\ 1-2a & & & -2a \\ 2a^2-a & 0 & a & a \end{array}\right)$$ Il minore inquadrato è diverso da 0, quindi $\varrho(A) = 2$.

Per calcolare $\varrho(A\,|\,b)$ si può considerare l'unica sottomatrice di $(A\,|\,b)$ (oltre A) che lo contiene, quella formata da C_2, C_3, C_4. Il suo determinante è $-a + 2a^2$ ed è nullo per $a = 0, 1/2$. In questi due casi, per il teorema di Kronecker, $\varrho(A\,|\,b) = 2$, altrimenti è 3.

In conclusione:
Se $b \neq 2a^2 - a$: una soluzione.
Se $b = 2a^2 - a$ e $a \neq 0, 1/2$: nessuna soluzione.
Se $a = 0$ e $b = 0$: ∞^1 soluzioni.
Se $a = 1/2$ e $b = 0$: ∞^1 soluzioni.
Notiamo che $b = 2a^2 - a$ è la parabola di vertice $(1/4\,, -1/8)$ passante per $(0, 0)$ e $(1/2, 0)$. La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



134. e. Eseguiamo un'operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & b \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 1-b & 2-b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è $a \cdot b \cdot (b-1)$, quindi se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $b \neq 1$, allora il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Esaminiamo quindi i tre casi particolari:

Se $a = 0$, calcoliamo il determinante dell'unica sottomatrice 3×3 significativa della matrice completa:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 1-b & 2-b \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} = b^2 + b - 2$$

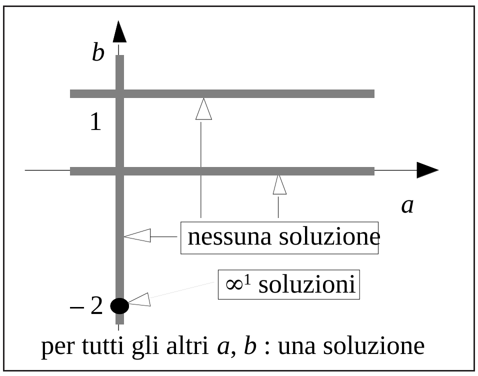
Quindi, se $b \neq -2, 1$, $\varrho(A\,|\,b) = 3$, mentre $\varrho(A) = 2$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $b = -2$ (sempre $a = 0$): $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + 2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$ e il sistema ha ∞^1 soluzioni. Il caso $b = 1$ (e $a = 0$) può venire esaminato nel sottocaso $b = 1$.

Se $b = 0$ la matrice è quella a lato ed il sistema non ha soluzioni, qualunque sia a. $$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Se $b = 1$ la matrice è quella a lato ed il sistema non ha soluzioni, qualunque sia a. $$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

In conclusione:
Se $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq 1$: una soluzione.
Se $a = 0$ e $b = -2$: ∞^1 soluzioni.
Se $a = 0$ e $b \neq -2$: nessuna soluzione.
Se $b = 0$ o $b = 1$: nessuna soluzione.



La situazione può essere schematizzata nel disegno sopra.

141. A. Riduciamo finché è possibile la matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k & 0 & k & -k \\ -k & 2 & 1 & 3k \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & -2 & k-3 & -k-1 \\ 0 & 4 & 4 & 3k+1 \end{pmatrix}$$

A questo punto conviene calcolare il determinante di A:
$\det(A) = k(3k^3 - 4k^2 - k + 2)$. Il determinante si annulla per $k = 0$ e per k soddisfacente l'equazione di terzo grado $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$.
Per tentativi, si scopre che $k = 1$ è una radice del polinomio $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$.
Dividendo $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$ per $k - 1$, si trova il quoziente $3k^2 - k - 2$ che si annulla per $k = 1$, $-2/3$. Quindi il determinante di A è nullo per $k = 0, 1, -2/3$. Di conseguenza:
<u>Se $k \neq 0$, 1 , $-2/3$</u>, $\varrho(A) = 4$, perché l'unico minore di ordine 4 è non nullo.

Esaminiamo $k = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ La matrice ha tre righe proporzionali. Eliminando le ultime due si ottiene una matrice ridotta con due righe significative, quindi:

<u>Se $k = 1$</u>, $\varrho(A) = 2$.

Esaminiamo $k = -2/3$: $\begin{pmatrix} -2/3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2/3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -11/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

<u>Se $k = -2/3$</u>, $\varrho(A) = 3$.

Per quanto riguarda la quarta colonna:
Se $k \neq 0$, 1 , $-2/3$ la matrice non ha alcuna colonna che sia combinazione lineare delle altre.
Per $k = 1$, c'è almeno un minore non nullo di ordine 2, per esempio quello incorniciato sopra, costituito da colonne che non comprendono la quarta.
Anche per $k = -2/3$, c'è un minore non nullo di ordine 3, costituito da colonne che non comprendono la quarta, per esempio quello già considerato in precedenza. Quindi:

Se $k = 1, -2/3$ la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre colonne, altrimenti no.

141. B. Calcoliamo il determinante di B previa qualche operazione elementare:

$$\begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ k+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 2 & k & (k+1)^2 \\ 0 & 2 & k & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 2 & k & (k+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2-3k \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \to R_3 + (k+1)R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \qquad R_4 \to R_4 - R_3$$

Ora il determinante è immediato sviluppando successivamente lungo la prima colonna e l'ultima riga ed è: $(-k^2 - 3k)(k + 2)k$. Il determinante è nullo per $k = 0, -2, -3$, quindi:
<u>Se $k \neq 0, -2, -3$</u>, la caratteristica è 4, perché l'unico minore di ordine 4 è non nullo.

Esaminiamo $k = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Eliminando l'ultima riga che è nulla e la terza riga che è uguale alla prima si ottiene una matrice con un minore di ordine due non nullo, quindi:

<u>Se $k = 0$</u>, $\varrho(B) = 2$.

Esaminiamo $k = -2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

<u>Se $k = -2$</u>, $\varrho(B) = 3$.

Esaminiamo $k = -3$: $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$

La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

<u>Se $k = -3$</u>, $\varrho(B) = 3$.

Per quanto riguarda la quarta colonna:
Se $k \neq 0\,,\ -2\,,\ -3$ la matrice non ha alcuna colonna che sia combinazione lineare delle altre.
Per $k = 0$, c'è almeno un minore non nullo di ordine 2, per esempio quello incorniciato sopra, costituito da colonne che non comprendono la quarta.
Per $k = -2$, si nota subito che $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, quindi non c'è alcun minore non nullo di ordine 3 costituito da colonne che non comprendono la quarta, che pertanto non è combinazione lineare delle altre.
Per $k = -3$, c'è un minore non nullo di ordine 3, costituito da colonne che non comprendono la quarta, per esempio quello già considerato in precedenza.
Quindi:

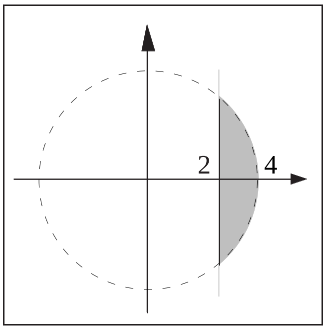
Se $k = 0, -3$ la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre colonne, altrimenti no.

142. Guardiamo i minori 3×3 della matrice: Il primo (C_1, C_2, C_3) ha determinante zero, per cui una delle colonne è combinazione lineare delle altre. Basta risolvere il sistema $\begin{cases} a & = & 4 \\ a - b & = & 1 \end{cases}$ (ottenuto da $aC_1 + bC_2 = C_3$) per scoprire che $4C_1 + 3C_2 = C_3$ e quindi C_1, C_2, C_3 sono ciascuna combinazione lineare delle altre due. Svolgendo un conto analogo su C_1, C_2, C_4 si scopre che $3C_1 + 2C_2 = C_4$. Il determinante di C_1, C_2, C_5 è diverso da zero, pertanto C_5 non è combinazione lineare di C_1 e C_2 e quindi neanche di tutte le altre, perché, se lo fosse, dalle relazioni tra C_1, C_2, C_3, C_4 si dedurrebbe che C_5 è combinazione lineare di C_1 e C_2.

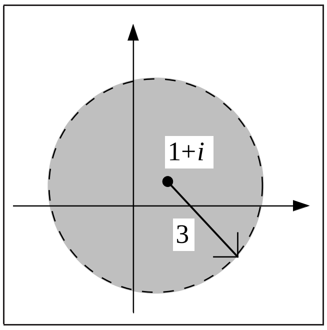
201. a. I numeri complessi z con $\mathrm{Re}\,(z) \geq 2$ sono quelli a destra della retta verticale (retta compresa). Quelli con modulo minore di 4 sono all'interno della circonferenza di centro 0 e raggio 4 (circonferenza esclusa). Quindi l'insieme è quello in grigio, arco (ed estremi dell'arco) escluso, ma segmento (senza estremi) compreso.

b. I numeri complessi z tali che $\mid z - (1+i) \mid < 3$ sono quelli che nel piano hanno distanza da $1+i$ minore di 3, quindi sono quelli all'interno della circonferenza di centro $1+i$ e raggio 3 (circonferenza esclusa).

a.



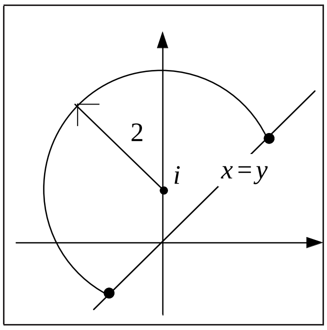
b.



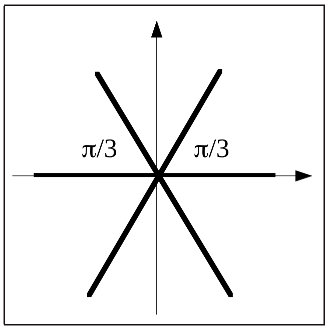
c. I numeri complessi z con $\mathrm{Im}\,(z) \geq \mathrm{Re}\,(z)$ sono quelli al di sopra della bisettrice principale (retta compresa). Quelli tali che $\mid z - i \mid = 2$ sono sulla circonferenza di centro i e raggio 2. Quindi l'insieme è l'arco di circonferenza segnato (estremi compresi).

d. Sia θ un argomento di z. Perché z^3 sia reale occorre che $\mathrm{Arg}(z^3) = k\pi$ per qualche $k \in$. Ma $\mathrm{Arg}(z^3) = 3\,\theta$, quindi $\theta = k\pi/3$ con $k \in$. Si hanno perciò i numeri di argomento $0, \pi/3, 2\pi/3, \ldots$, cioè sei semirette. Dato che poi anche 0 appartiene all'insieme, le sei semirette sono in pratica l'unione delle tre rette in grassetto.

c.



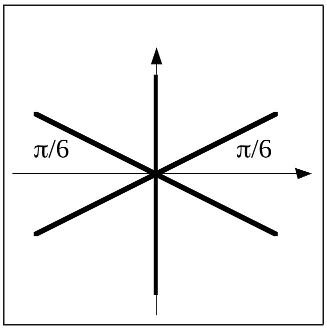
d.



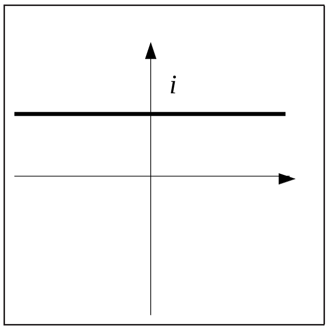
202. a. Sia θ un argomento di z. Perché iz^3 sia reale occorre che $\mathrm{Arg}(iz^3) = k\pi$ per qualche $k \in$, ma $\mathrm{Arg}(iz^3) = \mathrm{Arg}(i) + 3\,\theta = \pi/2 + 3\,\theta$, quindi si deve avere $k\pi = \pi/2 + 3\,\theta$ cioè $\theta = (k\pi - \pi/2)/3$ con $k \in$. Si hanno perciò i numeri di argomento $-\pi/6, \pi/6, \pi/2, \ldots$, cioè sei semirette. Dato che poi anche 0 appartiene all'insieme, le sei semirette sono in pratica l'unione delle tre rette in grassetto.

202. b. Poniamo $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Se $i + \overline{z} \in \mathbb{R}$, allora $i + a - ib \in \mathbb{R}$, cioè $a + (1-b)i \in \mathbb{R}$. Di conseguenza si deve avere $b = 1$. L'insieme è quindi una retta.

a.



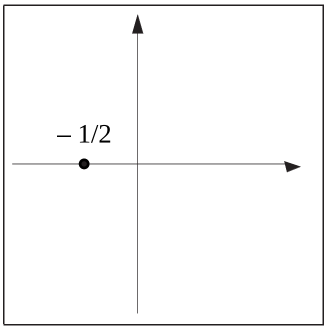
b.

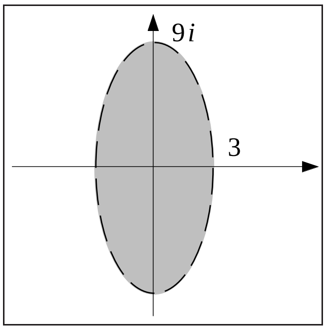


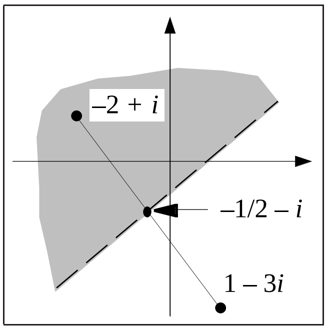
202. c. Poniamo $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e scriviamo $(1 + \overline{z}) =| z |$. Si ha: $1 + a - bi = \sqrt{a^2 + b^2}$, cioè $a + 1 + \sqrt{a^2 + b^2} + bi = 0$. Allora $b = 0$ e $a + 1 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$, cioè $a + 1 + \mid a \mid = 0$. Per $a > 0$ si trova $a = -1/2$, per $a < 0$ non si trova niente, quindi l'insieme è costituito dal solo numero $z = -1/2 + 0i = -1/2$

202. d. Poniamo $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. La diseguaglianza $\mid z + 2\overline{z} \mid < 9$ diventa $\mid a + ib + 2a - 2ib \mid < 9$, cioè $\mid 3a - ib \mid < 9$ o anche $\sqrt{9a^2 + b^2} < 9$ e $9a^2 + b^2 < 81$. Si tratta quindi dell'interno dell'ellisse $\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{b^2}{81} = 1$ che ha centro in 0 e semiassi di lunghezze rispettivamente 3 e 9. Il bordo è escluso perché la diseguaglianza è stretta.

202. e. Sono i punti che hanno distanza da $-2 + i$ minore di quella da $1 - 3i$, quindi sono situati nel semipiano individuato dalla retta che è l'asse del segmento che ha come estremi i due numeri complessi. Il punto medio del segmento è $\dfrac{(-2 + i) + (1 - 3i)}{2} = -\dfrac{1}{2} - i$.

c. 

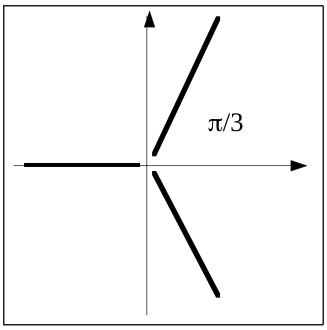
d. 

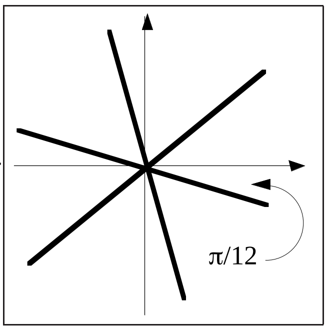
e. 

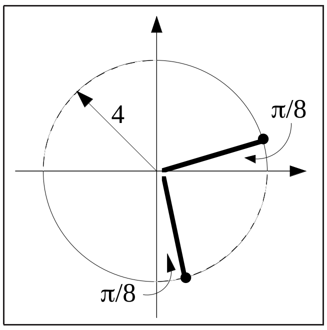
202. f. Sia θ un argomento di z. Allora $\mathrm{Arg}(z^4) = 4\theta$ e $\mathrm{Arg}(-z) = \theta + \pi$, quindi la condizione richiesta è che $4\theta = \theta + \pi + \underline{2k\pi}$ per $k \in$ (l'uguaglianza di argomenti è sempre a meno di multipli di $2k\pi$), da cui $\theta = \dfrac{(2k + 1)\pi}{3}$. Dando a k successivamente i valori $0, 1, 2$, si ottengono $\theta = \pi/3, \pi, 5\pi/3$. Gli altri k forniscono argomenti equivalenti. In definitiva sono le tre semirette dei numeri coi tre argomenti. Lo 0 non appartiene all'insieme.

202. g. Sia θ un argomento di z. Allora $\mathrm{Arg}(z^6) = 6\theta$ e il numero ib con $b < 0$ ha sempre argomento $-\pi/2$, quindi $6\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in$, da cui $\theta = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{6}$. In definitiva sono sei semirette. Dato che anche 0 fa parte dell'insieme, allora sono tre rette.

202. h. Sia θ un argomento di z. Allora un argomento di z^6 è $6\,\theta$., mentre un argomento di iz^2 è $\mathrm{Arg}(i) + 2\theta = \pi/2 + 2\theta$. Affinché gli argomenti siano gli stessi, essi devono differire di $2k\pi$ $(k \in)$, cioè $6\theta = \pi/2 + 2\theta + 2k\pi$, da cui $\theta = \pi/8 + k\pi/2$. Quindi i numeri z cercati hanno come possibili argomenti $\pi/8, 5\pi/8, 9\pi/8, 13\pi/8$ e sono situati su quattro semirette aventi come prmo estremo 0. Dato che però si deve avere $\mathrm{Re}\,(z) > 0$, escludiamo le semirette corrispondenti a $\theta = 5\pi/8, 9\pi/8$. Inoltre, poiché $\mid z \mid \leq 4$, restringiamo le semirette al disco di raggio 4 (bordo compreso). Escludiamo dall'insieme 0 che non ha argomento. In definitiva si hanno due segmenti (un estremo compreso, l'altro no).

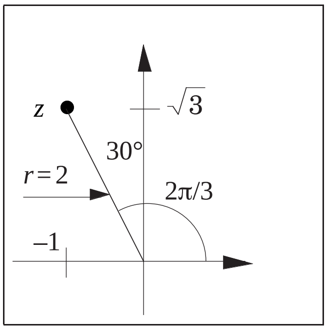
f. 

g. 

h. 

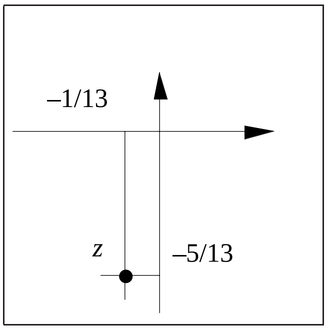
203. a. La parte reale e immaginaria sono -1 e $\sqrt{3}$. Il modulo è $\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.
Per quanto riguarda l'argomento θ, si ha $\{\cos(\theta) = -1/2\ ;\ \sin(\theta) = \sqrt{3}/2\}$ da cui $\theta = 2\pi/3$.
Se si vuole calcolare l'argomento mediante l'arcotangente, occorre tenere conto che il numero è nel secondo quadrante e quindi: $\theta = \arctan(\sqrt{3}/(-1))\underline{+\pi} = 2\pi/3$

$\mathrm{Re}\,(z) = -1 \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \sqrt{3}$
$\mid z \mid = 2 \qquad \theta = 2\pi/3$



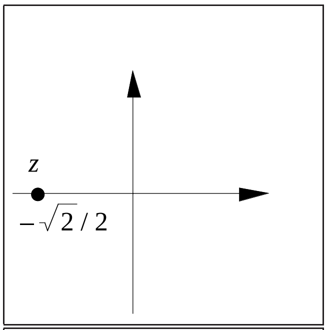
203. b. Si ha: $\dfrac{1+i}{-3+2i} = \dfrac{(1+i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \dfrac{-1-5i}{13}$.
Da qui parte reale e parte immaginaria. Dato che il numero è nel terzo quadrante, un'argomento si può calcolare con l'arcotangente, togliendo però π.

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{13} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{5}{13}$
$\mid z \mid = \sqrt{\dfrac{2}{13}} \qquad \theta = \arctan\dfrac{-5}{-1} - \pi \simeq -1.768 \simeq -101^0$



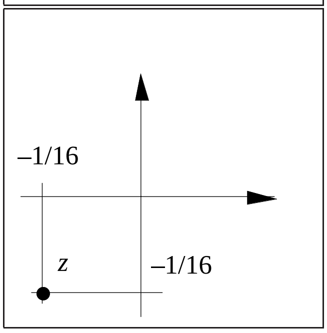
203. c. Il numero è reale negativo, quindi ha argomento π.

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = 0$
$\mid z \mid = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta = \pi$



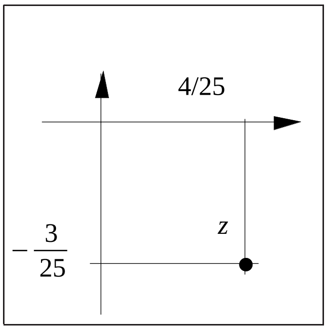
203. d. $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, mentre $1+\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\pi/3$.
Pertanto il numero in questione ha modulo $(\sqrt{2})^5/2^6$ e argomento $5(\pi/4) - 6(\pi/3) = -3\pi/4$ o anche l' equivalente $5\pi/4$. Quindi:

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{16} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{1}{16}$
$\mid z \mid = \dfrac{\sqrt{2}}{16} \qquad \theta = -\dfrac{3}{4}\pi$

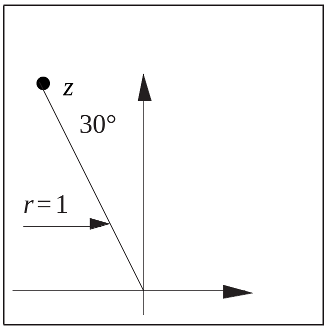


203. e. Conviene eseguire i calcoli algebricamente:
$\dfrac{i}{(1+2i)^2} = \dfrac{i(1-2i)^2}{(1+2i)^2\,(1-2i)^2} = \dfrac{4-3i}{25}$.
L'argomento può essere calcolato con l'arcotangente perché ci troviamo nel quarto quadrante.

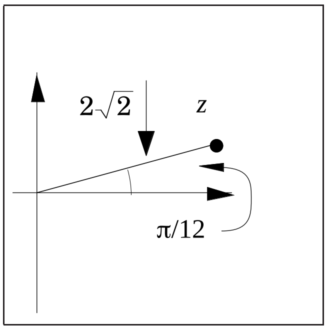
$\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{4}{25} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{3}{25}$
$\mid z \mid = \dfrac{1}{5} \qquad \theta = \arctan(-4/3) \simeq -0.927 \simeq -53^0$



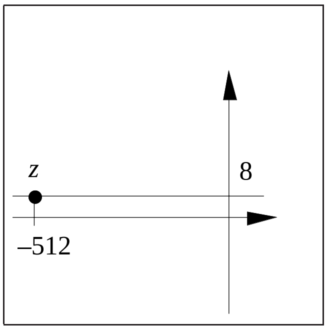
203. f. $1/2 - \sqrt{3}i/2$ ha modulo 1 e argomento $-\pi/3$.
La sua potenza 40-esima ha modulo 1 e argomento $-40\pi/3 = -39\pi/3 - \pi/3 = -13\pi - \pi/3 = -12\pi - 4\pi/3$ che è trigonometricamente equivalente a $-4\pi/3$ (dato che 12π è multiplo intero di 2π) e anche a $2\pi/3$. Perciò:
$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\mid z \mid = 1$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$



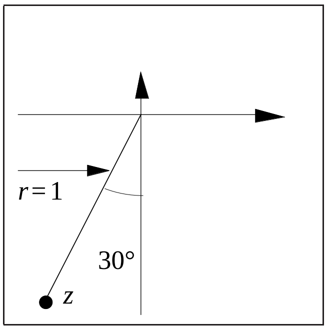
204. a. $\sqrt{3}+i$ ha modulo 2 e argomento $\pi/6$. Quindi $(\sqrt{3}+i)^{605}$ ha argomento $605\pi/6$ che è trigonometricamente equivalente a $5\pi/6$.
$1 - i$ ha argomento $-\pi/4$. L'argomento di $(1 - i)^7$ è quindi $-7\pi/4$.
$i^{33} = i^{32} \cdot i = i$ e ha argomento $\pi/2$.
L'argomento totale è $5\pi/6 + 7\pi/4 - \pi/2 = 25\pi/12$ trigonometricamente equivalente a $\pi/12$.
$\mathrm{Re}\,(z) = 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
$\mid z \mid = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{\pi}{12}$



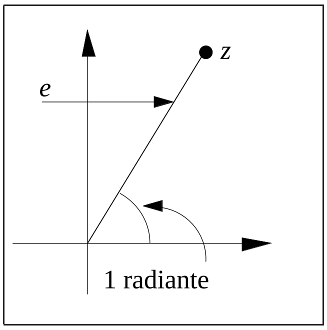
204. b. Si ha:
$(1 - \sqrt{3}i)^9 - (1+i)^6 = \left(2\,e^{-2\pi i/3}\right)^9 - \left(\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}\right)^6 =$
$= 2^9\,e^{-3\pi i} - 2^3\,e^{3\pi i/2} = -512 + 8i$
$\mathrm{Re}\,(z) = -512$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = 8$
$\mid z \mid = \sqrt{262208}$ $\qquad$ $\theta = \arctan\left(-\dfrac{1}{64}\right) + \pi$



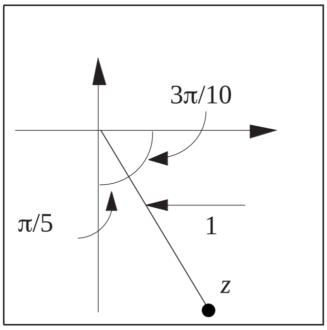
204. c. La divisione di 1726 per 3 ha quoto 575 e resto 1 da cui $1726 = 575 \cdot 3 + 1$ e $1726\,\dfrac{\pi}{3} = 575 \cdot 3\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = 575\pi + \dfrac{\pi}{3}$ che è trigonometricamente equivalente a $-\pi + \pi/3$ cioè a $-2\pi/3$ (o a anche a $\pi + \pi/3 = 4\pi/3$). Quindi:
$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\mid z \mid = 1$ $\qquad$ $\theta = -\dfrac{2}{3}\,\pi$



204. d. Si scrive $e^{1\,+\,i} = e^1 \cdot e^i$ e questa è la forma esponenziale di un numero complesso avente come modulo e e come argomento il coefficiente di i nell'esponente di e, cioè 1 (radiante). Quindi:
$\mathrm{Re}\,(z) = e \cdot \cos(1)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = e \cdot \sin(1)$
$\mid z \mid = e$ $\qquad$ $\theta = 1$
(dove per 1 si intende sempre 1 radiante e cioè circa $57°.17'\ldots$)



204. e. Parte reale e parte immaginaria sono ovvie e il modulo è 1. Per quanto riguarda l'argomento θ, usando note formule trigonometriche:

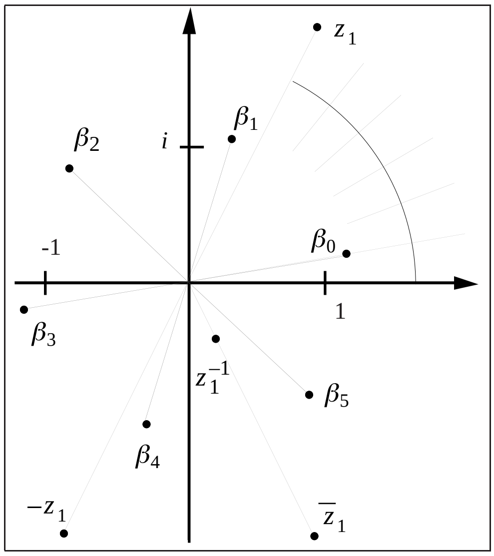


$$\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$$
$$\sin(\theta) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$$

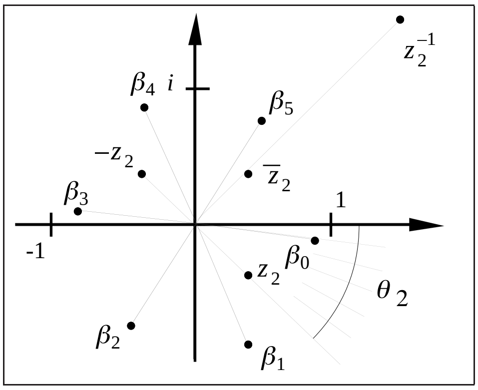
$\mathrm{Re}\,(z) = \sin(\pi/5)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = \cos(\pi/5)$

$\mid z \mid = 1$ $\qquad$ $\theta = -\dfrac{3}{10}\pi$

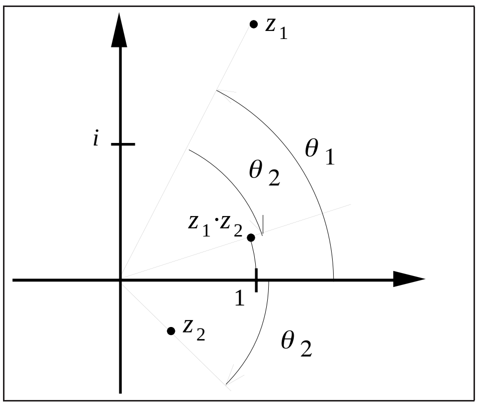
205. Il problema va risolto in maniera grafica. Valgano le seguenti considerazioni:



a. Il numero $\overline{z}_1$ ha lo stesso modulo di z_1, ma argomento opposto in segno. Quindi $\overline{z}_1$ è simmetrico di z_1 rispetto all'asse reale.
- Il numero $-z_1$ ha lo stesso modulo di z_1, ma argomento aumentato di π. Quindi $-z_1$ è simmetrico di z_1 rispetto all'origine.
- Se $z_1 = re^{\theta i}$, allora $z_1^{-1} = r^{-1}e^{-\theta i}$, quindi z^{-1} ha lo stesso argomento di $\overline{z}_1$, ma il suo modulo è 1/2.
- Le radici seste di z_1 hanno argomento $\sqrt[6]{2}$ (di poco maggiore di 1). La prima radice β_0 si disegna dividendo per 6 l'argomento di z_1. Le altre cinque si disegnano per simmetria, dato che dividono la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[6]{2}$ in 6 parti uguali.



b. Per il numero z_2 valgono le stesse considerazioni fatte per z_1.
- Il numero $\overline{z}_2$ ha lo stesso modulo di z_2, ma argomento opposto in segno. Quindi $\overline{z}_2$ è simmetrico di z_2 rispetto all'asse reale.
- Il numero $-z_2$ ha lo stesso modulo di z_2, ma argomento aumentato di π. Quindi $-z_2$ è simmetrico di z_2 rispetto all'origine.
- Il numero z_2^{-1} ha lo stesso argomento di $\overline{z}_2$, ma il suo modulo è 2.
- Le radici seste di z_2 hanno argomento $\sqrt[6]{1/2}$ che è di poco inferiore di 1. Come argomento di z_2 conviene prendere l'argomento *negativo* θ_2. La prima radice β_0 si può trovare dividendo θ_2 per 6. Le altre cinque si disegnano per simmetria.



c. Per disegnare $z_1 \cdot z_2$ occorre sommare gli argomenti di z_1 e di z_2. Come sopra prendiamo l'argomento *negativo* θ_2 di z_2 che va quindi *sottratto* all'argomento *positivo* θ_1 di z_1. Il modulo è il prodotto dei moduli, cioè 1.

206. a. Le radici quadrate di un numero complesso sono una opposta dell'altra e pertanto: $\mathrm{Arg}(z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \pi$. Inoltre $\mathrm{Arg}(\overline{z}_2) = -\mathrm{Arg}(z_2)$. Pertanto: $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot \overline{z}_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(\overline{z}_2) = -\pi$. Avendo argomento $-\pi$, allora $z_1 \cdot \overline{z}_2$ è un numero reale negativo.

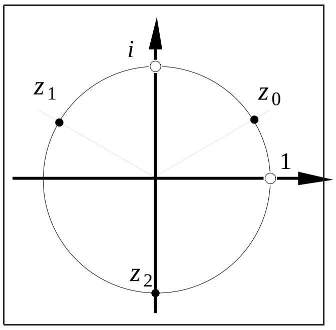
b. Sia θ un argomento di z. Allora z_1 e z_2 hanno lo stesso modulo r di z e argomenti che differiscono da quello di z per $2\pi/3$ e $-2\pi/3$, cioè $\theta + 2\pi/3$ e $\theta - 2\pi/3$. Quindi $z_1 \cdot z_2$ ha modulo r^2 e argomento $\theta + 2\pi/3 + \theta - 2\pi/3 = 2\theta$. Anche z^2 ha modulo r^2 e argomento 2θ, quindi coincidono.

207. a. Affinché $z_0 = (\sqrt{3} + i)/2$ sia radice di $z^n = 1$, occorre che $z_0^n = 1$. Ma $z_0 = e^{\pi i/6}$, quindi $z_0^n = e^{n\pi i/6}$. Perché sia 1 occorre che $n\pi i/6 = 2k\pi$ $(k \in)$. Come si vede subito, ciò accade per la prima volta per $n = 12$.

b. Se θ è un argomento di a. Le radici decime di a hanno parte reale $\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{10}$, quindi occorre che per almeno un k si abbia $\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{10} = 0$, cioè $\dfrac{\theta + 2k\pi}{10} = \pm\dfrac{\pi}{2}$ da cui $\theta = \pm 5\pi - 2k\pi$. Gli unici a con questi argomenti sono quelli reali negativi.

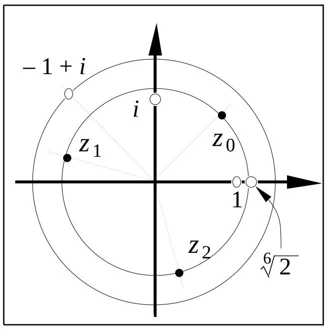
208. a. Scriviamo i in forma esponenziale: $i = 1 \cdot e^{(\pi/2)i}$. Le sue radici terze hanno modulo 1 e argomenti $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$ e sono quindi:

$$z_0 = e^{\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_1 = e^{5\pi i/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_2 = e^{3\pi i/2} = -i$$



208. b. Il numero $-1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $3\pi/4$, quindi le soluzioni sono $z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{3\pi/12 + 2k\pi/3)i}$. Ponendo $k = 0, 1, 2$ si ottiene:

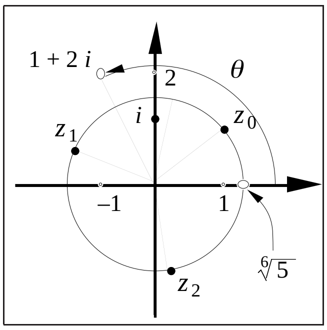
$$z_0 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{\pi i/4}$$
$$z_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{11\pi i/12}$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{19\pi i/12}$$



208. c. Il numero $-1 + 2i$ ha modulo $\sqrt{5}$. L'argomento è un angolo non notevole che si può calcolare come $\theta = \arctan(-2) + \pi$, quindi le soluzioni sono

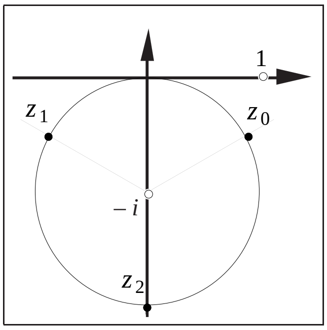
$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{5}} \cdot e^{(\theta/3 + 2k\pi/3)i} \quad \text{per } k = 0, 1, 2$$

Il disegno si può ottenere dividendo "in qualche modo" per 3 l'angolo θ e quindi ottenendo z_0. Le altre due si ottengono per simmetria dato che dividono la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[6]{5} \simeq 1.3$ in 3 parti uguali.



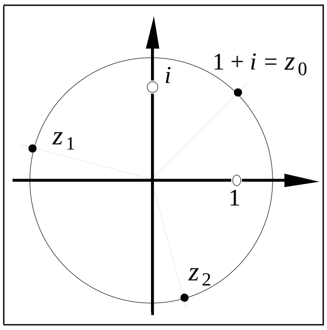
208. d. Si pone $u = z + i$ e si ottiene l'equazione $u^3 = i$, già risolta all'esercizio 08.a. Dato che $z = u - i$, le soluzioni sono quelle dell'equazione suddetta a cui è stato però sottratto i.

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad , \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad , \quad z_2 = -2i$$



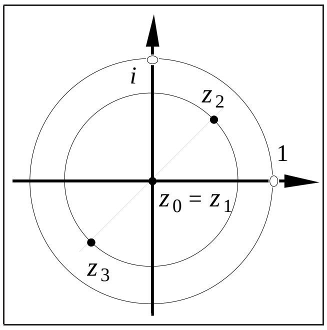
208. e. Il numero $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, il numero $(1+i)^3$ ha quindi modulo $\left(\sqrt{2}\right)^3$ e argomento $3\pi/4$. Le soluzioni dell'equazione hanno pertanto modulo $\sqrt{2}$ e argomento $3\pi/12 + 2k\pi/3$ per $k = 0, 1, 2$. Per $k = 0$ si ottiene ovviamente $1 + i$. Le soluzioni sono:

$$z_0 = 1+i \quad , \quad z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{11\pi i/12} \quad , \quad z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{19\pi i/12}$$



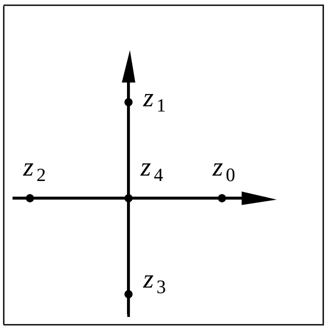
208. f. Si scrive $z^2(z^2 - i) = 0$. Quindi due radici del polinomio $z^4 - iz^2$ sono 0 le altre sono le radici quadrate di i che ha modulo 1 e argomento $\pi/2$ e sono quindi $\pm e^{\pi/4}$. In conclusione si ha:

$$z_0 = z_1 = 0 \quad , \quad z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad , \quad z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$



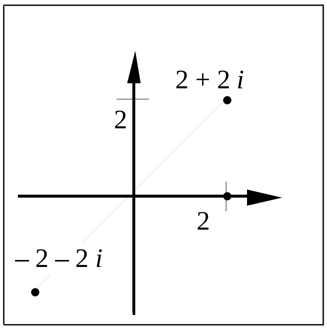
208. g. Si scrive $z(z^4 - 1) = 0$, quindi quattro delle soluzioni sono le radici quarte dell'unità che sono ± 1 e $\pm i$, la quinta soluzione è 0.

$$z_0 = 1 \ , \ z_1 = i \ , \ z_2 = -1 \ , \ z_3 = -i \ , \ z_4 = 0$$



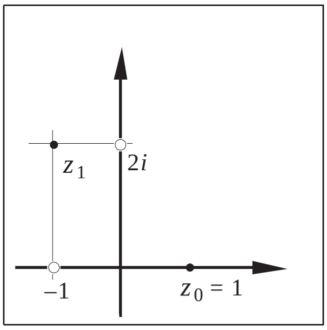
208. h. Dato che il numero $8i$ ha modulo 8 e argomento $\pi/2$, le sue radici quadrate hanno modulo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{2}$ per $k = 0, 1$, cioè $\pi/4$ e $5\pi/4$ e sono quindi:

$2\sqrt{2}e^{\pi i/4} = 2 + 2i \qquad 2\sqrt{2}e^{5\pi i/4} = -(2 + 2i)$

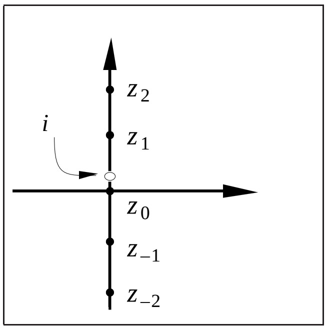


208. i. Si usa la nota formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $z_{1,2} = \dfrac{-b + \varepsilon_{1,2}}{2a}$, dove con $\varepsilon_{1,2}$ si intendono le due radici quadrate di $b^2 - 4ac$. In questo caso $b^2 - 4ac = 8i$ le cui radici quadrate sono $\pm(2+2i)$, come visto nel problema precedente. Le soluzioni dell'equazione sono pertanto:

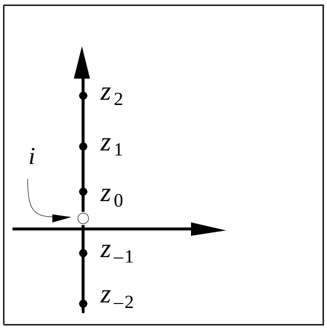
$$z_0 = 1 \quad , \quad z_1 = 2i - 1$$



208. j. Dato che $1 = e^0$, l'equazione può essere scritta come $e^z = e^0$. Da cui $z = 0 + 2k\pi i$ $(k \in)$ per la nota periodicità dell'esponenziale complesso.
Le soluzioni sono quindi infinite e sono $z_k = 2k\pi i$ $(k \in)$.
Si ha $z_0 = 0$ e gli altri numeri sono puramente immaginari:
$z_1 = 2\pi i \qquad z_{-1} = -2\pi i \qquad z_2 = 4\pi i$ etc.

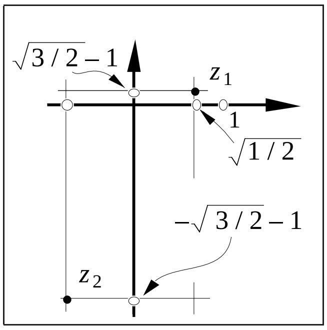


208. k. Dato che $-1 = e^{\pi i}$, l'equazione può essere scritta come $e^z = e^{\pi i}$. Da cui $z = \pi i + 2k\pi i$ $(k \in)$ per la periodicità dell'esponenziale complesso.
Le soluzioni sono quindi $z_k = (2k+1)\pi i$ $(k \in)$. Sono tutti numeri puramente immaginari:
$z_0 = \pi i \qquad z_1 = 3\pi i \qquad z_{-1} = -\pi i \qquad z_2 = 5\pi i$ etc.



209. a. Si usa la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $z_{1,2} = \dfrac{-b + \varepsilon_{1,2}}{2a}$, dove, con $\varepsilon_{1,2}$ si intendono le due radici quadrate di $b^2 - 4ac$. Si può calcolare che $b^2 - 4ac = 4 - 4\sqrt{3}i$ e che le sue radici quadrate sono $\pm(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$. Le soluzioni dell'equazione sono allora:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{1/2} + (\pm\sqrt{3/2} - 1)i$$



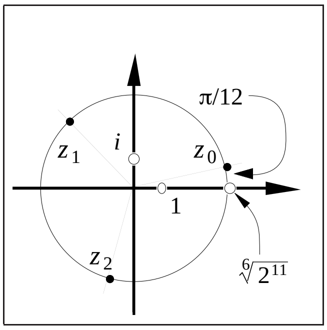
209. b. Scriviamo tutto in forma esponenziale:

$$z^3 = \frac{(\sqrt{3}+i)^6}{(1+i)i} = \frac{(2e^{\pi i/6})^6}{\sqrt{2}e^{\pi i/4} \cdot e^{\pi i/2}} =$$
$$= \frac{2^6}{\sqrt{2}}\, e^{\pi - \pi/4 - \pi/2} = 2^{11/2} e^{\pi i/4}$$

Quindi le soluzioni sono:

$$z_k = 2^{11/6} \cdot e^{\pi i/12 + 2k\pi i/3} \qquad k = 0, 1, 2$$

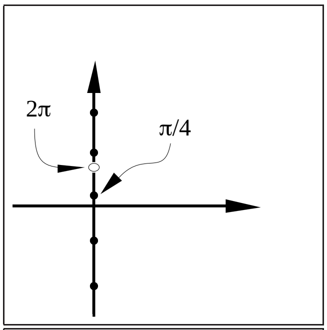
$$z_0 = 2^{11/6} \cdot e^{\pi i/12}$$
$$z_1 = 2^{11/6} \cdot e^{9\pi i/12}$$
$$z_2 = 2^{11/6} \cdot e^{17\pi i/12}$$



209. c. Scriviamo $e^z = 0$ come $e^{a+bi} = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Allora $e^a \cdot e^{bi} = 0$. Dato che $a \in \mathbb{R}$, allora, com'è noto, si ha sempre $e^a \neq 0$. Inoltre $e^{bi} = \cos(b) + i\sin(b)$ e non esiste $b \in \mathbb{R}$ che abbia seno e coseno entrambi nulli. Quindi anche e^{bi} è sempre diverso da 0. Quindi l'equazione non ha soluzioni.

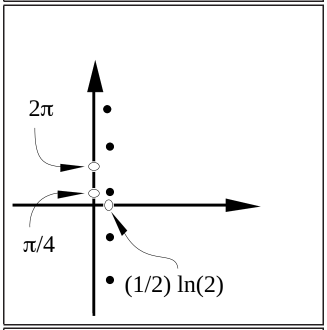
209. d. Si ha: $(\sqrt{2}/2)(1+i) = e^{\pi i/4}$, da cui $e^z = e^{\pi i/4}$.
Per la periodicità dell'esponenziale:

$$z_k = (\pi/4 + 2k\pi)i \qquad (k \in)$$



209. e. Si scrive $e^z = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$ o anche $e^z = e^{\ln(\sqrt{2}) + \pi i/4}$.
Le soluzioni sono le stesse della precedente equazione traslate di $\ln(\sqrt{2}) = 1/2\ln(2)$

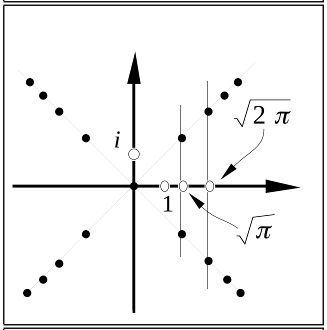
$1/2\ln(2) + (\pi/4 + 2k\pi)i \qquad (k \in).$



209. f. Si scrive $e^{z^2} = e^0$, da cui, per la periodicità dell'esponenziale, si ha $z^2 = 0 + 2k\pi i$ o $z^2 = 2k\pi i$. Bisogna distinguere tra $k > 0$ (per cui $2k\pi i$ ha argomento $\pi/2$ e modulo $2k\pi$) e $k < 0$ (per cui $2k\pi i$ ha argomento $3\pi/2$ e modulo $-2k\pi$). Le radici quadrate di i sono $\pm(1+i)/\sqrt{2}$, quelle di $-i$ sono $\pm(-1+i)/\sqrt{2}$. Le soluzioni sono perciò:

$\pm\sqrt{k\pi}(1+i)$ $(k \in {}^+)$ $\qquad \pm\sqrt{-k\pi}(-1+i)$ $(k \in {}^-)$.

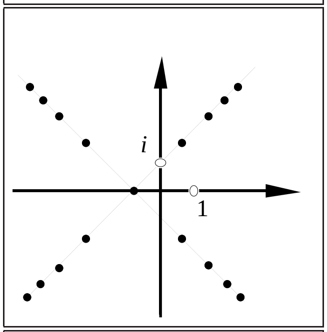
Inoltre (per $k = 0$) anche 0 è soluzione.



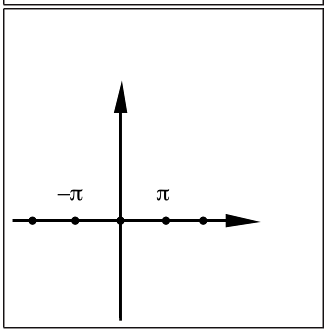
209. g. Si ha $z^2 + 2z + 1 = 2k\pi i$; la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado fornisce $z = -1 + \varepsilon_{1,2}$ dove $\varepsilon_{1,2}$ sono le radici quadrate di $2k\pi i$; il resto è come nell'equazione precedente. Le soluzioni sono pertanto le stesse della precedente equazione traslate di -1:

$-1 \pm \sqrt{k\pi}(1+i)$ $(k \in {}^+)$ $\qquad -1 \pm \sqrt{-k\pi}(1-i)$ $(k \in {}^-)$

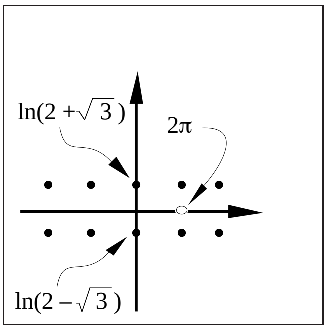
Anche -1 è soluzione.



209. h. L'equazione non ha ulteriori soluzioni complesse oltre alle ben note soluzioni reali: $k\pi$ $(k \in)$.



209. i. $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ da cui $e^{iz} + e^{-iz} = 4 \quad e^{iz} + \dfrac{1}{e^{iz}} = 4$
$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$. Ponendo $y = e^{iz}$ e risolvendo l'equazione di secondo grado in y si trova $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$.
I numeri $2 \pm \sqrt{3}$ sono reali e positivi, la loro forma esponenziale è $2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})e^0$, quindi $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})e^0$ o anche $e^{iz} = e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})}$, da cui $iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$ $(k \in)$.
In definitiva, le soluzioni sono:
$-i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi \ (k \in)$.



211. Perché abbia le radici 4 e 5/7 deve essere multiplo di $x - 4$ e di $x - 5/7$. Per esempio $P(x) = (x - 4)(x - 5/7)$ soddisfa la richiesta.

212. Se $P(x)$ ha le radici 1 e 2 e grado due, allora deve avere come fattori i polinomi $x - 1$ e $x - 2$, quindi deve potersi scrivere come $P(x) = Q(x)(x - 1)(x - 2)$. Perché abbia grado 2, occorre che Q abbia grado 1, cioè che sia una costante a; quindi $P(x) = a(x - 1)(x - 2)$. Sostituendo 0 a x si ottiene $1 = 2a$, quindi $P(x) = \dfrac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$

213. Siano $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad Q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. Allora:
Se $n > m$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \cdots a^n x^n$ e ha grado n.
Se $m > n$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \cdots a^m x^m$ e ha grado m.
Se $m = n$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \cdots (a^n + b^n)x^n$. Se $a^n + b^n \neq 0$ il grado è n, altrimenti è inferiore, in ogni caso e $\deg(P + Q) \leq m$ e $\deg(P + Q) \leq n$, cioè $\deg(P + Q) \leq \max\{m, n\}$
Si ha: $(P \cdot Q)(x) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + a_n b_m x^{n+m}$, quindi $P \cdot Q$ ha grado $m + n$, dato che che $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.

214. Dato che il polinomio $x^n - z$ ha esattamente le radici $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, allora lo si decompone come: $x^n - z = (x - z_0) \cdots (x - z_{n-1})$.
Nel secondo membro, il coefficiente di x^{n-1}, come si può calcolare, è $z_0 + \cdots + z_{n-1}$, mentre nel primo membro il coefficiente di x^{n-1} è ovviamente 0 da cui l'uguaglianza cercata.

215. Dividiamo il polinomio per $x - 1$. Si trova come resto 0. Questo prova che 1 è radice. Il quoziente è il polinomio $2x^2 - 5x - 3$ che ha come radici 3 e $-1/2$. Queste sono dunque le altre due radici del polinomio.

216. Dato che $P(x)$ deve avere coefficienti reali, allora deve avere come radici anche $1 - i$ e $-i$. Avendo già quattro radici, ha grado quattro, il minimo possibile, ed è:
$$P(x) = a(x - 1 + i)(x - 1 - i)(x - i)(x + i) \text{ o meglio } P(x) = a(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1) \quad a \in \mathbb{R}$$
Perché sia $P(1) = 3$ occorre $P(1) = a(1 - 2 + 2)(1 + 1) = 3$ da cui $a = 3/2$
Allora: $P(x) = 3/2(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)$.

217. Dato che $P(x)$ ha coefficienti complessi, non è necessario che abbia come radici anche i coniugati di i e $1 + i$, quindi: $\qquad P(x) = a(x - 1 - i)(x - i) \quad a \in \mathbb{C}$
Perché sia $P(1) = 3$ occorre che $P(1) = a(-i)(1 - i) = 3$ da cui:
$$a = \frac{3}{-1 - i} = \frac{3 \cdot (-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,i$$
Allora: $P(x) = (-3/2 + 3i/2)(x - 1 - i)(x - i)$.

218. Per avere coefficienti reali, il polinomio deve avere come radice anche $1 - i$ e per avere grado 3 deve avere anche una terza radice per esempio 1. Quindi possiamo prendere il polinomio $P(x) = (x - 1 + i)(x - 1 - i)(x - 1) = ((x - 1)^2 + 1)(x - 1) = (x^2 - 2x + 2)(x - 1)$.

219. Dovrà essere $P(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)Q(x)$; inoltre $P(i) = (1 - 2i)Q(i) = 1$ da cui $Q(i) = (1/5) + (2/5)i$. Quindi $Q(x)$ non può avere grado 0, perché deve essere reale. Per esempio si può porre $Q(x) = (2/5)x + (1/5)$ per cui $P(x) = ((2/5)x + (1/5))(x^2 - 2x + 2)$.

220. Essendo i polinomi a coefficienti reali, deve essere possibile decomporli in fattori di grado 1 e di grado 2 con discriminante negativo:

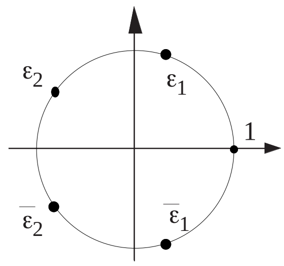
a. x^4+1 ha come radici le radici quarte di -1 che sono: $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ e $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$ (a due a due coniugate), quindi si ha:

$$x^4+1=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\quad\cdot\quad\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\left[\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\quad\cdot\quad\left[\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

b. x^2+2x+4 è un polinomio di grado due con discriminante negativo, quindi non è ulteriormente scomponibile.

c. x^5-1 ha come radici le radici quinte dell'unità che sono $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2$. Si ha perciò:
$x^5-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\overline{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\overline{\varepsilon}_2)$ quindi la decomposizione è $(x-1)(x^2-(\varepsilon_1+\overline{\varepsilon}_1)x+\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1)(x^2-(\varepsilon_2+\overline{\varepsilon}_2)x+\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2)$.
Dato che, come si calcola subito, si ha:
$\varepsilon_1=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)\qquad \varepsilon_2=\cos(4\pi/5)+i\sin(4\pi/5)$
allora la decomposizione in fattori reali è:
$x^5-1=(x-1)(x^2-2x\cos(2\pi/5)+1)(x^2-2x\cos(4\pi/5)+1)$



d. Si ha: $x^6-x^2=x^2(x^4-1)=x^2(x^2-1)(x^2+1)$. Il polinomio x^2+1 non è ulteriormente scomponibile, quindi:
$x^6-x^2=x\cdot x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

221. Le radici ventisettesime di un numero reale positivo sono ventisette: una reale e ventisei a due a due complesse coniugate per cui $x^{27}-3$ ha quattordici fattori reali: tredici di grado 2 e uno di grado 1.

222. Si ha $P(x)=a_0(x-x_1)^{2m_1}\cdots(x-x_n)^{2m_n}$ per cui $P(x)$ è il quadrato del polinomio $a(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_n)^{m_n}$ (a una delle due radici quadrate di a_0). Se $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, l'ipotesi è che il coefficiente direttivo sia positivo. Non occorrono ipotesi sulle radici.

223. a. Sì, per esempio $P(x)=x-ix$.
b. Sì, per esempio $P(x)=ix^2-ix$.
c. Sì, per esempio $P(x)=(x-i)(x+i)^2$.
d. No, ogni potenza di un numero reale è reale.

224. Chiamiamo $P(x)$ il polinomio. Il numero 1 è radice di $P(x)$ perché si ha:
$P(1)=1-5+10-10+5-1+1-4+6-4+1=0$
Calcoliamo le derivate del polinomio e sostituiamo 1:
$P'(x)=11x^{10}-50x^9+90x^8-80x^7+35x^6-6x^5+5x^4-16x^3+18x^2-8x+1$
$\qquad P'(1)=11-50+90-80+35-6+5-16+18-8+1=0$
$P''(x)=110x^9-450x^8+720x^7-560x^6+210x^5-30x^4+20x^3-48x^2+36x-8$
$\qquad P''(1)=110-450+720-560+210-30+20-48+36-8=0$
$P'''(x)=990x^8-3600x^7+5040x^6-3360x^5+1050x^4-120x^3+60x^2-96x+36$
$\qquad P'''(1)=990-3600+5040-3360+1050-120+60-96+36=0$
$P^{IV}(x)=7920x^7-25200x^6+30240x^5-16800x^4+4200x^3-360x^2+120x-96$
$\qquad P^{IV}(1)=7920-25200+30240-16800+4200-360+120-96=24\neq 0$
Quindi la molteplicità è 4.

225. Affinché i sia radice di $P(x)$ occorre che $P(i)=0$, cioè che: $\qquad i^{31}-2i^5+ai+b=0$.
Affinché i abbia molteplicità almeno 2 occorre che $P'(i)=0$.
Dato che $P'(x)=31x^{30}-10x^4+a$, occorre che $\qquad 31\cdot i^{30}-10\cdot i^4+a=0$.
Ma $i^{31}=-i$, $i^5=i$, $i^{30}=-1$ e $i^4=1$, quindi le due condizioni diventano:

$$\begin{cases}-3i+ai+b=0\\-41+a=0\end{cases}\qquad\text{Si calcola subito che:}\qquad\begin{cases}a=41\\b=-38i\end{cases}$$

301. a. Scriviamo $a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,2,1)=(0,0,0)$. Si ottiene l'eguaglianza $(a+c\ ,\ a+b+2c\ ,\ b+c)=(0,0,0)$ da cui $\{a+c=0\ ,\ a+b+2c=0\ ,\ b+c=0\}$. Questo è un sistema lineare omogeneo 3×3 nelle incognite a,b,c che ha come matrice dei coefficienti quella sotto, che è anche la matrice delle coordinate dei tre vettori.

Mediante l'algoritmo gaussiano, si può constatare che il sistema ha ∞^1 soluzioni non banali $(-c,-c,c)$. Per esempio $a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-1$ da cui $1(1,1,0)+1(0,1,1)-1(1,2,1)=(0,0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se prendiamo un'altra soluzione, per esempio $a=2\ ,b=2\ ,c=-2$ otteniamo un'altra combinazione.

b. Come nel precedente caso occorre studiare un sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice delle coordinate dei tre vettori. Le soluzioni sono $(c,-2c,c)$. Per esempio per $a=1\ ,b=-2\ ,c=1$ si ha: $1(1,2,3)-2(4,5,6)+1(7,8,9)=(0,0,0)$. Un'altra combinazione lineare si ottiene per esempio raddoppiando i coefficienti.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

c. Sono linearmente dipendenti perché uno di essi è nullo. Una combinazione lineare è evidente ed è per esempio: $0(1,4,5)+0(2,3,-1)+1(0,0,0)=(0,0,0)$. Un'altra è quella con coefficienti $0\ ,\ 0\ ,\ 2$.

d. Sono linearmente dipendenti perché il terzo vettore è multiplo del primo per il coefficiente π, quindi una combinazione lineare è $\pi(1,\pi,0)+0(10^{45},\pi,2)-1(\pi,\pi^2,0)=(0,0,0)$. Un'altra è quella con coefficienti $2\pi\ ,\ 0\ ,\ -2$.

e. Sono linearmente dipendenti perché il secondo vettore è il primo moltiplicato per i, quindi una combinazione lineare è $i(1,i,0)-(i,-1,0)+0(0,0,i)=(0,0,0)$. Un'altra combinazione lineare è $(1,i,0)+i(i,-1,0)+0(0,0,i)=(0,0,0)$ ottenuta moltiplicando la prima per $-i$.

f. Come nel primo caso occorre studiare un sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice delle coordinate dei tre vettori.

Le soluzioni sono $\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)c\ ,\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)c\ ,\ c\right)$, quindi per $c=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1,i,1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(i,1,-1)+(1,1,0)=(0,0,0)$$

Oppure (ponendo $c=1+i$) $(1,i,1)+(i,1,-1)-(1+i)(1,1,0)=(0,0,0)$

302. a. Scriviamo $(1,2,0)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(1,1,0)$ cioè $(1,2,0)=(a+c\ ,\ b+c\ ,\ 0)$. Da cui il sistema lineare 3×3 in (a,b,c):

$$\begin{cases} 1=a+c \\ 2=b+c \\ 0=0 \end{cases}$$

Il sistema ha le ∞^1 soluzioni $(1-c\ ,\ 2-c\ ,\ c)$, tra le quali:

$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=0$ da cui: $(1,2,0)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+0(1,1,0)$

Un'altra soluzione è

$a=0\ ,\ b=1\ ,\ c=1$ da cui: $(1,2,0)=0(1,0,0)+1(0,1,0)+1(1,1,0)$

302. b. Possiamo innanzitutto osservare che i tre sono vettori sono linearmente indipendenti in quanto la matrice formata dalle loro coordinate ha determinante diverso da 0. Tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ ne costituiscono una base. Pertanto $(1,1,1)$ può esprimersi in un solo modo come loro combinazione lineare.

Scriviamo $(1,1,1)=a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,0,1)$. Si ottiene il sistema 3×3 in (a,b,c) che ha un'unica soluzione: $a=1/2\ ,\ b=1/2\ ,\ c=1/2$

$$\begin{cases} 1 = a+c \\ 1 = a+b \\ 1 = b+c \end{cases}$$

Quindi: $(1,1,1)=1/2(1,1,0)+1/2(0,1,1)+1/2(1,0,1)$

303. Scriviamo $a(1,2,1)+b(1,0,1)+c(1,1,1)+d(0,1,2)=(0,0,0)$. Questo è un sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è formata dalle coordinate dei quattro vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \infty^1 \text{ soluzioni:} \\ (-c/2\ ,\ -c/2\ ,\ c\ ,\ 0) \end{matrix}$$

Per esempio per $c=-2$ si ha $(1,2,1)+(1,0,1)-2(1,1,1)+0(0,1,2)=(0,0,0)$.
Dall'eguaglianza si ricava subito che ciascuno dei primi tre è combinazione lineare dei rimanenti:

$(1,2,1) = -(1,0,1) + 2(1,1,1) + 0(0,1,2)$
$(1,0,1) = -(1,2,1) + 2(1,1,1) + 0(0,1,2)$
$(1,1,1) = 1/2(1,2,1) + 1/2(1,0,1) + 0(0,1,2)$

Ma $(0,1,2)$ non lo è perché se fosse $x(1,2,1) + y(1,0,1) + z(1,1,1) = (0,1,2)$, si ricaverebbe: $\{x+y+z=0 \quad 2x+z=1 \quad x+y+z=2\}$ e questo sistema 3×3 non ha soluzioni.

Altro modo: la matrice a lato ha caratteristica 3, ma l'unico minore 3×3 ricavabile dalle prime tre colonne ha determinante 0, per cui $(0,1,2)$ non è combinazione lineare dei rimanenti.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

304. a. Se fosse $a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(0,0,1) = (0,0,0)$, allora si avrebbe: $(a\ ,\ b\ ,\ b+c) = (0,0,0)$ da cui $a = b = c = 0$.
Dato che sono tre vettori linearmente indipendenti nello spazio $\mathbb{R}^3$ che ha dimensione 3, costituiscono già base.

b. Si può procedere come nel caso precedente, oppure considerare la matrice delle coordinate dei vettori che ha determinante diverso da 0.
Come sopra, 3 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ costituiscono già base.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. È linearmente indipendente perché è diverso da 0.
Per completarlo a base possiamo usare due vettori della base canonica.
Per esempio $(0,1,1), (1,0,0), (0,1,0)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché si tratta di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ (basta guardare la matrice delle loro coordinate).

d. I *due* vettori sono linearmente indipendenti perché sono *due* e non proporzionali.
Una base di $\mathbb{C}^3$ è per esempio $(0,1,1), (0,7,i), (1,0,0)$ perché si tratta di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^3$ (basta guardare la matrice delle loro coordinate).

e. I *due* vettori sono linearmente indipendenti perché sono *due* e non proporzionali.
Dato che sono due vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^2$ che ha dimensione 2, costituiscono già base.

f. Scriviamo $a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si ha: $\begin{pmatrix} b+2c & 0 \\ a+c & a+2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

da cui il sistema lineare omogeneo a lato che ha la sola soluzione $a = b = c = 0$.
$$\begin{cases} b+2c=0 \\ a+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$
Per completare a base possiamo usare un vettore della base "canonica" di M_{22} per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. I quattro vettori sono linearmente indipendenti perché non è zero il determinante della matrice delle coordinate rispetto alla base "canonica" di M_{22} in cui ogni colonna è data da una delle quattro matrici 2×2 "appiattita" per righe.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

305. Sommando i primi due si ottiene $2u$, quindi una combinazione è per esempio
$$u = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u-v) + 0\cdot v$$
Un'altra possibilità è quella di sottrarre il terzo del primo: $u = 1(u+v) + 0(u-v) - 1\cdot v$.
Scriviamo in generale $u = a(u+v) + b(u-v) + cv$. Si ottiene $u = (a+b)u + (a-b+c)v$.
Ogni scelta di a, b, c tale che $a-b+c=0$ dà una combinazione lineare come quella richiesta.
Esistono pertanto infiniti modi .

306. I vettori sono linearmente dipendenti perché 4 vettori in uno spazio di dimensione 3 lo sono sempre.
Cerchiamo a, b, c, d non tutti nulli tali che $a(1,0,1)+b(1,1,2)+c(1,2,3)+d(-1,2,1) = (0,0,0)$.
Ne risulta il sistema omogeneo in (a,b,c,d) che ha A come matrice dei coefficienti. A è anche la matrice delle coordinate dei vettori.
Il sistema ha le ∞^2 soluzioni $(c+3d\ ,\ -2c-2d\ ,\ c\ ,\ d)$ con cui si possono scrivere tutte le relazioni lineari tra i 4 vettori.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
Il sistema ha ∞^2 soluzioni perché la matrice ha caratteristica 2. Questo prova che lo spazio da essi generato ha dimensione 2. Quindi occorre scartare due vettori. Dato che è possibile ricavare

minori non nulli di ordine 2 da ogni coppia di colonne della matrice, allora è possibile scartare due qualunque dei quattro vettori e i restanti due saranno sempre linearmente indipendenti.

307. a. Per ipotesi è possibile scrivere $au + bv + cw = 0$ con a, b, c non tutti nulli. Allora $c \neq 0$ (altrimenti si avrebbe $au+bv = 0$ con a, b non tutti nulli). Pertanto $w = (-a/c)u+(-b/c)v$.
    b. Controesempio: $u \neq 0$ qualunque, $v = 2u$ e w linearmente indipendente con u. Chiaramente w non è combinazione lineare di u e v.
    c. Se fosse $a(u-v)+b(u+v)+c(v+w) = 0$ allora $(a+b)u+(-a+b+c)v+cw = 0$ e dato che u, v, w sono linearmente indipendenti allora $(a + b) = (-a + b + c) = c = 0$, sistema lineare omogeneo che ha la sola soluzione $a = b = c = 0$.
    d. Per ipotesi è possibile trovare a, b, c non tutti nulli tali che $au + bv + cw = 0$.
    Cerchiamo ora x, y, z tali che $x(u-v)+y(u+v)+z(v+w) = 0$ uguaglianza che, riordinando, si può scrivere $(x + y)\,u + (-x + y + z)\,v + z\,w = 0$.
    Possiamo quindi scegliere $\{x + y = a \quad , \quad -x + y + z = b \quad , \quad z = c\}$. Questo è un sistema lineare 3×3 in (x, y, z). Risolvendolo si trova $x = (a - b + c)/2$, $y = (a + b - c)/2$, $z = c$. Dato che il sistema non è omogeneo (a, b, c sono non tutti nulli) è chiaro che anche x, y, z sono non tutti nulli e quindi abbiamo la combinazione lineare cercata.
    e. Per ipotesi ogni vettore $z \in V$ si può scrivere come $z = au + bv + cw$; con conto simile al precedente si trova: $z = ((a - b + c)/2)(u - v) + ((a + b - c)/2)(u + v) + c(v + w)$.

308. Vediamo se è possibile trovare x e y non entrambi nulli tali che $x(au + bv) + y(cu + dv) = 0$, cioè $(xa + yc)u + (xb + yd)v = 0$.
Poiché u, v sono linearmente indipendenti, ciò è possibile se e solo se il sistema omogeneo $\begin{cases} xa + yc = 0 \\ xb + yd = 0 \end{cases}$ ha soluzioni non banali cioè se e solo se $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$. Quindi sono linearmente dipendenti se e solo se $ad - bc = 0$.

310. a. No: per esempio $(1, 0), (0, 1)$ appartengono a V, ma la loro somma no.
    b. No: per esempio $(1, 0, 0)$ appartiene a V, ma $\sqrt{2}\,(1, 0, 0)$ no.
    c. No, perché anche se V è definito da un sistema lineare, il sistema non è omogeneo. Per esempio $(0, 0, 0)$ non sta in V.
    d. Sì: la dipendenza lineare di un qualunque insieme di vettori è sempre sottospazio.
    Scartando $(0, 0, 0)$ i due che rimangono $(1, 1, 0), (0, 2, 1)$ sono ancora generatori per V ed essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base.
    e. No: due soli vettori non possono formare un sottospazio
    f. Sì, è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.
    Le soluzioni sono ∞^2 e sono $(3z - t,\ z - t/3\ ,\ z\ ,\ t)$ e si può scrivere
    $(3z - t,\ z - t/3\ ,\ z\ ,\ t) = z\,(3\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0) + t\,(-1\ ,\ -1/3\ ,\ 0\ ,\ 1)$.
    I due vettori $(3\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0)$, $(-1\ ,\ -1/3\ ,\ 0\ ,\ 1)$ sono quindi generatori per V ed essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base.
    g. I vettori di V si possono scrivere come: $(a - b\ ,\ a + 2b\ ,\ 3b) = a(1, 1, 0) + b(-1, 2, 3)$ e quindi V è $L\{(1, 1, 0), (-1, 2, 3)\}$ che è *sempre* sottospazio.
    I due vettori $(1, 1, 0)$, $(-1, 2, 3)$ sono generatori per V per definizione di $L\{\quad\}$ ed essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base.
    h. Sì: è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.
    I vettori sono tutti multipli di $(i, 1)$ che quindi forma una base per V.
    i. No: per esempio $(1, 1), (2, 4)$ stanno in V, ma la loro somma no.
    j. No: Per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ stanno in V, ma la loro somma no.

311. Le verifiche del fatto che sono sottospazi sono di routine. A titolo di esempio proviamo che le matrici simmetriche formano sottospazio:

Se A e B sono simmetriche, allora $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$ per ogni i, j. Quindi dato che l'elemento (i, j)-esimo di $A + B$ è $a_{ij} + b_{ij}$ si ha $a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$ e $A + B$ è simmetrica. Analogamente per λA. Esempi di basi sono:

a. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b. Si osservi che nelle matrici antisimmetriche la diagonale principale è nulla. Basi per i sottospazi sono per esempio:
$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

d. Diamo esempi di basi solo per le triangolari superiori (le altre sono analoghe)
$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

e. Si osservi che nelle matrici hermitiane la diagonale principale è reale. Come basi possiamo prendere:
$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i&0\\-i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}$ etc. (9 elementi)

312. I tre vettori sono linearmente dipendenti, dato che il determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori è nullo. Per avere una base occorre scartarne qualcuno. Per esempio scartando il terzo si trovano $(1,1,0),(1,3,2)$ che, essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base. Analogamente scartando il secondo si ha la base $(1,1,0),(0,1,1)$.

313. É possibile completare a base la successione dei due vettori perché essi sono linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali. Per completare usando vettori della base canonica occorre sempre verificare che i 4 vettori siano linearmente indipendenti, cosa che si può fare scrivendo la matrice 4×4 delle loro coordinate e verificando che abbia determinante diverso da zero. Due modi corretti sono
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)$
Due modi non leciti sono invece:
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)$
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)$
perché i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

314. a. Il sistema che definisce V_1 ha ∞^1 soluzioni che sono $((3/2)z\,,\ -(3/2)z\,,\ z)$ $(z\in\mathbb{R})$. Quindi $\dim(V_1)=1$ e una base per V_1 è per esempio $(3,-3,2)$.
Un sistema di generatori che non sia base è per esempio il seguente: $(3,-3,2),(6,-6,4)$.

b. Il sistema che definisce V_2 ha ∞^2 soluzioni che sono $(-2y+z\,,\ y\,,\ z)$ $(y,z\in\mathbb{R})$. Quindi $\dim(V_2)=2$ e una base per V_2 è per esempio $(2,-1,0),(1,0,1)$.
Un sistema di generatori che non sia base è per esempio il seguente: $(2,-1,0),(1,0,1),(1,1,3)$ ottenuto aggiungendo ai due vettori della base un qualunque altro vettore di V_2, per esempio il vettore $(1,1,3)=-(2,-1,0)+3(1,0,1)$.

315. I vettori di W sono $a(1,2,0,0)+b(0,1,0,1)=(a,2a+b,0,b)$ al variare di $a,b\in\mathbb{R}$. Per vedere se uno di essi sta in V_1, occorre vedere se soddisfa l'equazione omogenea che definisce V_1: $a+2(2a+b)+2(b)=0$ da cui $5a+4b=0$. Per esempio per $a=4\,,\ b=-5$ si ottiene il vettore $(4,3,0,-5)$ di W che sta anche in V_1.

316. V ha dimensione 3 perché 3 è la caratteristica della matrice delle coordinate dei quattro vettori che lo generano. Dato che il terzo vettore è somma dei primi due, è possibile estrarre una base per V eliminando il primo o il secondo o il terzo vettore, ma non il quarto.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&0&2&1\\0&1&1&0\\1&-2&-1&0\end{pmatrix}$$

317. $\mathcal{B}$ è base perché la matrice 3×3 delle coordinate dei vettori ha determinante diverso da zero. Scriviamo $v = a(1,1,0)+b(0,2,1)+c(0,0,2)$. Allora $(1,2,1) = (a, a+2b, b+2c)$ cioè: $(\,1 = a \quad , \quad 2 = a+2b \quad , \quad 1 = b+2c\,)$. Risolvendo il sistema lineare in (a,b,c) si trova: $a = 1 \quad b = 1/2 \quad c = 1/4$. Quindi $v_{\mathcal{B}}$ è la matrice a lato. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

Esiste poi certamente un vettore di coordinate $[1\ 2\ 3]^T$ ed è ovviamente il vettore
$v = 1\,(1,1,0) + 2\,(0,2,1) + 3\,(0,0,2) = (1,5,8)$.

318. Osserviamo innanzitutto che W ha dimensione 2 dato che la base fornita (è una base perché si tratta di *due* vettori non proporzionali) è formata da due vettori.

a. Per avere un'altra base possiamo per esempio prima sommare e poi sottrarre i due vettori; si ottengono i due vettori $(1,3,-1),(1,1,1)$ che formano una base di W (che chiamiamo $\mathcal{B}_1$,) perché son *due* vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 2.

b. Per vedere se $v \in W$ si scrive: $(1,0,2) = a(1,2,0) + b(0,1,-1)$. Questo è un sistema lineare 3×2 che ha la soluzione $a = 1$, $b = -2$. Da qui si deduce che $v \in W$. Analogamente il sistema lineare $(0,1,2) = a(1,2,0) + b(0,1,-1)$ non ha soluzioni e quindi $w \notin W$.
Usando la soluzione del primo sistema lineare si può scrivere $(1,0,2) = 1(1,2,0)-2(0,1,-1)$.
Quindi la matrice delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Per avere quella rispetto a $\mathcal{B}_1$ si risolve il sistema $(1,0,2) = a(1,3,-1) + b(1,1,1)$ che ha la soluzione $a = -1/2$, $b = 3/2$.
La matrice delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}_1$ è quindi $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

c. Sia $\mathcal{B}_2 : w_1 , w_2$. Occorre che $(1,0,2) = 1\cdot w_1 + 0\cdot w_2$, quindi $w_1 = (1,0,2)$. Completiamo w_1 a base di W mediante un altro vettore <u>di W</u>, per esempio con $w_2 = (0,1,-1)$ e abbiamo la base richiesta.

319. a. Si ha: $\dim(W) = \varrho(A)$ dove A è la matrice delle coordinate dei quattro vettori che generano W. Per calcolare la caratteristica di A la riduciamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_4 \\ R_3 \to R_3 + 3R_2 \\ R_4 \to R_4 + 2R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminiamo R_4 identica a R_3: ora A è ridotta con 3 pivot. Quindi $\varrho(A) = 3$ e $\dim(W) = 3$.
Per avere una base occorre scartare uno dei quattro generatori.
Dato che la sottomatrice inquadrata ha determinante diverso da 0, è possibile scartare per esempio il terzo e i tre che restano sono linearmente indipendenti. Da qui si ricava la base:
$\mathcal{B} : (1,2,2,0),(0,2,3,-1),(1,1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che non è possibile scartare il quarto, perché nessuna delle sottomatrici costituite dalle prime tre colonne ha determinante diverso da 0.
I vettori di W sono le combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{B}$, cioè i vettori del tipo
$a\,(1,2,2,0) + b\,(0,2,3,-1) + c\,(1,1,1,1) = (a+c\ ,\ 2a+2b+c\ ,\ 2a+3b+c\ ,\ -b+c)$

b. Avendo ricavato una base per W, un modo di verificare le appartenenze a W è quello di controllare se è nullo il determinante della matrice 4×4 formata con le coordinate dei tre vettori che generano W e del vettore in questione. Scritte le due matrici, si verifica che:

$$\det\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = 0 \quad \det\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \neq 0 \text{ quindi:} \quad w_1 \in W \qquad w_2 \notin V$$

c. In a. abbiamo ricavato tutti i vettori di W: $(a+c, 2a+2b+c, 2a+3b+c, -b+c)$. Per avere le prime due componenti nulle occorre che $a+c = 0$ e $2a+2b+c = 0$. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ 2a+2b+c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \infty^1 \text{ soluzioni: } (-c\ ,\ c/2\ ,\ c)$$

Per esempio ponendo $c = 2$, si ha $a = -2 \quad b = 1 \quad c = 2$ da cui il vettore $w = (0,0,1,1)$.

d. Per scrivere $w_{\mathcal{B}}$ usiamo i conti sopra da cui si vede che $w = -2\,(1,2,2,0) + 1\,(0,2,3,-1) + 2\,(1,1,1,1)$, da cui la matrice.

$$w_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e. Avendo già una base di W, possiamo prendere due vettori da essa per completare il vettore linearmente indipendente w a base di W.
Per esempio prendiamo $(0,2,3,-1)$, $(1,1,1,1)$.
I tre vettori sono linearmente indipendenti, dato che la matrice a lato ha caratteristica 3 (minore inquadrato) e tre vettori linearmente indipendenti in W che ha dimensione 3 costituiscono una base.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

320. I tre vettori che generano V sono linearmente dipendenti perché la matrice a lato ha caratteristica 2 (basta ridurre con l'algoritmo di Gauss). Una sua base è per esempio quella costituita dai primi due vettori dato che sono *due* e linearmente indipendenti in quanto non proporzionali.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'appartenenza a V si verifica esaminando le due matrici 4×3 formate con le coordinate dei due vettori della base di V e dei vettori in questione (matrici in questo caso differenti solo per un elemento). Se ne calcola la caratteristica con l'algoritmo di Gauss e si vede che: $\varrho(A) = 3$ per v_1 e $\varrho(A) = 2$ per v_2, quindi $v_1 \notin V \qquad v_2 \in V$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

321. Dovrà essere $(1,2,1) = v_1 + v_2 + v_3$ e $(0,1,1) = v_2 + v_3$. Sottraendo le due eguaglianze si ha $v_1 = (1,1,0)$, da cui $v_2 + v_3 = (0,1,1)$.
Ogni base che soddisfi queste condizioni va bene, per esempio la base $(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

322. a. I due vettori che generano V soddisfano entrambi l'equazione omogenea $x + y + z = t$ che definisce W, quindi ogni vettore di V (che è loro combinazione lineare) la soddisfa.
b. I tre vettori che generano W ne sono anche una base (sono linearmente indipendenti). Il determinante della matrice 4×4 formata da $(3,0,2,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W è nullo, per cui $(3,0,2,1)$ sta in W. Analogamente è nullo il determinante della matrice 4×4 formata da $(2,2,3,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W per cui anche $(2,2,3,1) \in W$. Questo basta ad assicurare che $V \subset W$.
c. Una base per V è per esempio $(1,-1,0,0), (0,2,-2,-1)$. Poi si procede esattamente come in b.
d. Per esempio basta osservare che $(0,-1,1,1) \in V$, ma $(0,-1,1,1) \notin W$ (dato che è diverso da 0 il determinante della matrice 4×4 formata da $(0,-1,1,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W).

323. V è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in V$, allora $A_1 B = B A_1$ e $A_2 B = B A_2$ da cui facilmente $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) B = B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$ cioè $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V$.
Si pone $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e si vede che $A \in V$ se e solo se $a = b + d$ e $2c = 3b$. Questo è un sistema lineare con ∞^2 soluzioni dipendenti da b e d. Due soluzioni linearmente indipendenti si trovano per esempio ponendo successivamente $b = 0$, $d = 1$, e $b = 1$, $d = 0$. In questo modo si trovano due matrici linearmente indipendenti: I , $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}$ che quindi formano una base per V.
Sapendo ora che $\dim(V) = 2$ si vede subito che un'altra base è I, B^{-1} (due matrici linearmente indipendenti che stanno ovviamente in V).

324. V è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in V$, allora $A_1 B = D_1$ e $A_2 B = D_2$ (D_1 e D_2 diagonali) da cui $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) B = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ che è sempre diagtheoremonale cioè $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V$.
Procedendo come nel problema precedente, si trova $b = 2a$ e $c = -3d$. Una base per V è quindi per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

331. a. Vera: è un segmento orientato.
b. Falsa: un vettore è *un insieme di segmenti orientati.*
c. Vera: ogni segmento orientato rappresenta un vettore geometrico.

332. a. Sì: è il prodotto dello scalare $|\,\vec{w}\,|$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.

b. Sì: è il prodotto di due numeri reali ed è quindi uno scalare.
c. Sì, ma solo se $\vec{w} \neq \vec{0}$. È il prodotto dello scalare $1/ \mid \vec{w} \mid$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.
d. No: non ha senso dividere per un vettore.
e. Sì: è il prodotto dello scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.
f. No: non si può sommare lo scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ col il vettore $\vec{w}$.
g. Sì: è la somma di due scalari.
h. Sì: è il prodotto scalare di due vettori ed è uno scalare.
i. No: è ambiguo, dato che in generale $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ sono differenti.
j. Sì: ed è un vettore.
k. Sì: è il prodotto scalare del vettore $\vec{u}$ per il vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ (il prodotto vettore va eseguito prima) e dà luogo allo scalare prodotto misto.
l. Sì: è la differenza di due vettori ed è un vettore.
m. Sì: è il prodotto scalare del vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ per il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ed è quindi uno scalare.

333. Calcolo del primo:
$(1,2,0) \wedge (3,2,0) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to (0,0,-4)$. Poi:
$(0,0,-4) \wedge (1,1,1) \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to (4,-4,0)$
Calcolo del secondo:
Prima $(3,2,0) \wedge (1,1,1) \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to (2,-3,1)$. Poi:
$(1,2,0) \wedge (2,-3,1) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to (2,-1,-7)$

334. Nel primo caso no, perché $\vec{v} \cdot \vec{w} = \mid \vec{v} \mid \mid \vec{w} \mid \cos(\theta)$. Nel secondo sì, basta che l'angolo compreso tra i due vettori abbia coseno $-1/2$.

335. Si ha che $\mid \vec{u} \wedge \vec{v} \mid = 4$ e che $\vec{v}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sono ortogonali, da qui la tesi.

336. a. Applicando la distributività: $(\vec{u} + a\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + a\vec{v} \wedge \vec{v}$, da cui la tesi, dato che $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
b. Applicando la distributività: $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u} \wedge \vec{w}$.
Il secondo prodotto misto è nullo, perché ci sono due vettori uguali. Il primo è l'opposto del terzo perché sono due prodotti misti con gli stessi vettori, ma con due vettori scambiati. Da qui la tesi.

337. Per ipotesi si hanno le due eguaglianze:
$$\frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_1 \mid \cdot \mid \vec{u} \mid} = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_2 \mid \cdot \mid \vec{u} \mid} \ ; \ \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}}{\mid \vec{w}_1 \mid \cdot \mid \vec{v} \mid} = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_2 \mid \cdot \mid \vec{u} \mid} \text{ da cui } \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_1 \mid} = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_2 \mid} \text{ e } \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}}{\mid \vec{w}_1 \mid} = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}}{\mid \vec{w}_2 \mid}$$
Moltiplicando la prima eguaglianza per a, la seconda per b e sommando si ha la tesi.

341. Il vettore $(1, 2-1)$ ha modulo $\sqrt{6}$, i due vettori sono dunque: $\pm\dfrac{5}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$

342. Sia (x,y,z) il vettore cercato, allora $(x,y,z) \cdot (1,2,3) = 0 \quad$ e $\quad (x,y,z) \cdot (1,1,-1) = 0$.
Da qui le due equazioni $(x + 2y + 3z = 0 \quad x + y - z = 0)$. Questo è un sistema lineare 2×3 in (x,y,z) che ha le ∞^1 soluzioni $(5z\ ,\ -4z\ ,\ z)$. Una soluzione è $(5,-4,1)$. Un vettore che soddisfa la richiesta è il suo normalizzato, un altro è l'opposto del normalizzato. Soluzioni del problema sono quindi: $\pm\dfrac{(5\ ,\ -4\ ,\ 1)}{\sqrt{42}}$.
Altro modo: Calcoliamo il prodotto vettore $(1,2,3) \wedge (1,1,-1) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to (-5,4,-1)$.
Si trova un vettore che soddisfa la richiesta, poi si procede come sopra.

343 a. I vettori di W sono le combinazioni lineari dei vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, quindi $\vec{v}$ sarà del tipo $\vec{v} = a(1,1,0) + b(2,-1,2) = (a + 2b\ ,\ a - b\ ,\ 2b)$. Ponendo $\vec{v} \cdot \vec{\jmath} = 0$ si ricava $a - b = 0$. Per esempio si può scegliere $a = 1 \quad b = 1$ da cui $\vec{v} = (3,0,2)$. Il vettore cercato sarà il normalizzato di $\vec{v}$ oppure il suo opposto. Per esempio $\quad \vec{v} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\ ,\ 0\ ,\ \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

b. I vettori di W sono $(a+2b\,,\ a-b\,,\ 2b)$.
La condizione di ortogonalità a $\vec{v}_1$ è: $(a+2b\,,\ a-b\,,\ 2b)\cdot(1,1,0)=0$
Cioè $a+2b+a-b=0$ $2a+b=0$. L'equazione lineare in a,b ha ∞^1 soluzioni tra cui per esempio $a=1$ e $b=-2$, da cui $\vec{w}=(-3,3,-4)$.
Vediamo se forma angolo acuto con $\vec{v}_2$: $\vec{w}\cdot\vec{v}_2=(-3,3,-4)\cdot(2,-1,2)=-6-3-8=-17<0$, quindi l'angolo è ottuso. Per rimediare sarà sufficiente cambiare il verso a $\vec{w}$ e prendere $\vec{w}=(3,-3,4)$.
Perché abbia modulo 1 basterà normalizzarlo: $\vec{w}=\dfrac{(3,-3,4)}{\sqrt{34}}$

c. Il vettore $\vec{v}$ è stato ottenuto come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$: $\vec{v}=1\cdot\vec{v}_1+1\cdot\vec{v}_2$. La normalizzazione ha cambiato la combinazione lineare in $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\vec{v}_1+\dfrac{1}{\sqrt{13}}\vec{v}_2$.
Quindi la matrice delle coordinate di $\vec{v}$ è $\begin{pmatrix}1/\sqrt{13}\\1/\sqrt{13}\end{pmatrix}$
Il vettore $\vec{w}$ è stato ottenuto (dopo il cambiamento di verso) come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, cioè $-1(1,1,0)+2(2,-1,2)$
Dopo la normalizzazione la combinazione lineare diventa $\vec{w}=-\dfrac{1}{\sqrt{34}}(1,1,0)+\dfrac{2}{\sqrt{34}}(2,-1,2)$
Quindi la matrice delle coordinate di $\vec{w}$ è $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{34}\\2/\sqrt{34}\end{pmatrix}$

344. a. Cerchiamo innanzitutto una base solo ortogonale:
Come primo vettore possiamo scegliere $\vec{v}=(1,1,0)$.
Il secondo vettore dovrà essere un vettore di W cioè del tipo
$a\vec{v}+b\vec{w}=a(1,1,0)+b(0,-1,2)=(a\,,\ a-b\,,\ 2b)$
Il secondo vettore dovrà poi essere ortogonale a $\vec{v}$, cioè dovrà essere
$(a\,,\ a-b\,,\ 2b)\cdot(1,1,0)=0$ $a\cdot 1+(a-b)\cdot 1+2b\cdot 0=0$ $2a-b=0$
Per esempio per $a=1$ e $b=2$ otteniamo il vettore $(1,-1,4)$.
Una base ortogonale per W è quindi $(1,1,0),(1,-1,4)$.
Per averla ortonormale basterà normalizzare i due vettori: $\mathcal{B}:\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ ,\ \dfrac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,4)$

b. Occorre esprimere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$: Si ha evidentemente $\vec{v}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)+0\left(\dfrac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,4)\right)$, quindi le coordinate di $\vec{v}$ sono $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$
Per quanto riguarda $\vec{w}$, scriviamo $(0,-1,2)=a\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)+b\left(\dfrac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,4)\right)$ il che porta al sistema lineare 3×2 nelle incognite a,b:

$$\begin{cases}(1/\sqrt{2})\,a+(1/\sqrt{18})\,b=0\\(1/\sqrt{2})\,a-(1/\sqrt{18})\,b=-1\\0\cdot a+(4/\sqrt{18})\,b=2\end{cases}$$

Sapendo che il sistema ha una soluzione (le coordinate rispetto a una base sono uniche), si ricava subito dall'ultima equazione $b=\sqrt{18}/2$ e quindi dalla prima $a=-\sqrt{2}/2$
Quindi le coordinate di $\vec{w}$ sono $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\\sqrt{18}/2\end{pmatrix}$

c. Occorre cercare un terzo vettore di V_3 ortogonale a entrambi. Il modo più semplice è di prendere $(1,1,0)\wedge(1,-1,4)=(4,-4,-2)$ o anche il suo multiplo $(2,-2,-1)$. Per averlo di modulo 1 lo si normalizza, quindi la base $\mathcal{B}_1$ è

$$\mathcal{B}_1:\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,4)\ ,\ \frac{1}{3}(2,-2,-1)$$

345. Le coordinate dei due vettori si ricavano dalla figura e si vede che $\vec{v}=(1,0,2)$ e $\vec{w}=(-1,3,1)$.
a. Si ha: $|\,\vec{v}\,|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$ $|\,\vec{w}\,|=\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}=\sqrt{11}$
$\vec{v}\cdot\vec{w}=1\cdot(-1)+0\cdot 3+2\cdot 1=1$, quindi: $\cos(\theta)=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\,\vec{v}\,|\,|\,\vec{w}\,|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\,\sqrt{11}}=\dfrac{1}{\sqrt{55}}$
Dato che θ è tra 0 e π, allora $\theta=\arccos(1/\sqrt{55})$
Volendo proseguire il conto mediante calcolatrice:
$\cos(\theta)\simeq 0.135$, da cui $\theta\simeq 1.436$ (in radianti) o $\theta\simeq 82^\circ$ (in gradi).

b. I vettori di W sono tutte le combinazioni lineari dei vettori della base $\vec{v}$ e $\vec{w}$ cioè i vettori del tipo $a\vec{v} + b\vec{w} = a(1,0,2) + b(-1,3,1) = (a-b\ ,\ 3b\ ,\ 2a+b)$

Imponiamo l'ortogonalità con $\vec{k} = (0,0,1)$: $(a-b\ ,\ 3b\ ,\ 2a+b)\cdot(0,0,1) = 2a+b = 0$

Per esempio con $a = 1$ e $b = -2$ si ha il vettore $\vec{u} = (3,-6,0)$.

Va bene anche $\vec{u} = (1,-2,0)$ (multiplo).

c. I vettori di W sono tutti i vettori del tipo $(a-b\ ,\ 3b\ ,\ 2a+b)$. Occorre un vettore di W ortogonale a $\vec{u}$, quindi occorre che

$$(a-b\ ,\ 3b\ ,\ 2a+b)\cdot(1,-2,0) = a-b-6b = a-7b = 0$$

Per esempio per $a = 7$ e $b = 1$ si ottiene $(6,3,15)$ e la base ortogonale di W è $(1,-2,0), (6,3,15)$

d. Avendo già due vettori ortogonali di V_3 ricavati dal precedente conto occorre aggiungerne uno ortogonale a entrambi. Per esempio $(1,-2,0)\wedge(6,3,15)$:

$(1,-2,0)\wedge(6,3,15) \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \to (-30\ ,\ -15\ ,\ 15)$

Come terzo vettore della base va quindi bene il vettore trovato o anche un suo multiplo.

Se lo dividiamo per 15 troviamo: $(1,-2,0)\ ,\ (6,3,15)\ ,\ (-2,-1,1)$

346. a. Per verificare che sono linearmente dipendenti, basta verificare che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha deteminante nullo. Per semplificare i conti possiamo usare anche la matrice a lato che ha le colonne proporzionali a quella delle coordinate. Ha determinante 0 e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti e li possiamo pensare come segmenti orientati giacenti sullo stesso piano.

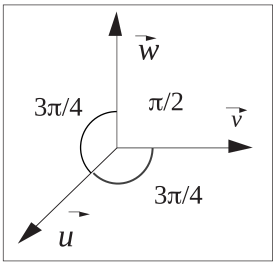
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Calcoliamo gli angoli. Basta il prodotto scalare perché hanno tutti e tre modulo 1.

Angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$: $\cos(\theta_1) = \dfrac{(-2,2,1)}{3}\cdot\dfrac{(1,2,-2)}{3} = 0 \quad \theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$

Tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$: $\cos(\theta_2) = \dfrac{(-2,2,1)}{3}\cdot\dfrac{(1,-4,1)}{\sqrt{18}} = \dfrac{-9}{3\sqrt{18}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \quad \theta_2 = \dfrac{3\pi}{4}$

Tra $\vec{w}$ e $\vec{u}$: $\cos(\theta_3) = \dfrac{(1,2,-2)}{3}\cdot\dfrac{(1,-4,1)}{\sqrt{18}} = \dfrac{-9}{3\sqrt{18}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \quad \theta_3 = \dfrac{3\pi}{4}$



c. Dagli angoli e dal fatto che sono complanari, lo schizzo

347. Si deve avere: $(\vec{v}-(1,0,0))\cdot(1,1,2) = 0$ e $\vec{v}\cdot(0,1,0) = 0$ cioè: $\vec{v}\cdot(1,1,2) = (1,0,0)\cdot(1,1,2)$ e $\vec{v}\cdot(0,1,0) = 0$.
Ponendo $\vec{v} = (x,y,z)$ si ha il sistema lineare $\{x+y+2z = 1 \quad y = 0\}$ da cui si trovano i vettori $(1-2z\ ,\ 0\ ,\ z) \quad (z \in \mathbb{R})$.

348. I vettori sono $a(1,-1,1)$ e bisogna che $|\ (a,-a,a)-(1,0,0)\ | = \sqrt{(a-1)^2+a^2+a^2} = 3$, da cui $a = 2, -4/3$. I vettori cercati sono quindi $\vec{v} = 2(1,-1,1)$ e $\vec{v} = (-4/3)(1,-1,1)$

349. a. È sinistrorsa: si ottiene dalla base destrorsa $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ con un solo scambio.

b. È destrorsa, : si ottiene dalla base destrorsa $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ con una permutazione circolare verso sinistra.

c. È destrorsa, basta verificare che il segno del determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori è positivo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

350. a. La proiezione è per definizione: $\dfrac{(1,2,1)\cdot(0,3,1)}{|\ (0,3,1)\ |^2}\ (0,3,1) = \dfrac{7}{10}\ (0,3,1)$.

b. Il vettore è del tipo $a(1,2,1)$.

La sua proiezione ortogonale su $(0,3,1)$ è $\dfrac{a(1,2,1)\cdot(0,3,1)}{|\ (0,3,1)\ |^2}\ (0,3,1) = \dfrac{7a}{10}\ (0,3,1)$ e ha modulo $\left|\dfrac{7a}{10}\right|\ |\,(0,3,1)\,| = \dfrac{7}{10}\ \sqrt{10}\,|\,a\,|$. Da cui $a = \pm\sqrt{10}/7$. Quindi ci sono due vettori che soddisfano la condizione e sono : $\pm\dfrac{10}{7\sqrt{10}}\ (1,2,1)$

351. Dato che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente indipendenti, la prima condizione implica che $\vec{w}$ sia combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cioè che $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. La seconda impone che $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, cioè che $a\vec{u} \cdot \vec{v} + b\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ e quindi che $2a + 2b = 0$, ossia $b = -a$, da cui $\vec{w} = a\vec{u} - a\vec{v} = a(\vec{u} - \vec{v})$.

Per la terza condizione: la proiezione è $\dfrac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\, \vec{u} = \dfrac{(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\, \vec{u} = \dfrac{3a}{5}\,(1, 2, 0)$ che ha modulo $\dfrac{|\,3a\,|}{5}|(1, 2, 0| = \dfrac{|\,3a\,|}{\sqrt{5}}$, da cui $a = \pm\sqrt{5}/3$. Ci sono dunque due soluzioni al problema: $\vec{w} = \pm(\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$.

352. I vettori sono (x, y) e occorre che $\dfrac{(x, y) \cdot (-1, 2)}{|\,(x, y)\,|\,|\,(-1, 2)\,|} = \dfrac{1}{2}$, cioè $\dfrac{-x + 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$, da cui $-2x + 4y = \sqrt{5x^2 + 5y^2}$. Possiamo elevare a quadrato questa equazione

supponendo però che $-2x + 4y > 0$

e si ottiene $x^2 + 16xy - 11y^2 = 0$ che si può scrivere (ponendo $y \neq 0$) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 16\left(\dfrac{x}{y}\right) - 11 = 0$ da cui $(x/y) = -8 \pm 5\sqrt{3}$. I vettori sono quindi $((-8 \pm 5\sqrt{3})y, y)$, ma occorre che $-x + 2y > 0$, cioè che $(8 \mp 5\sqrt{3})y + 2y > 0$ e, dato che $10 \mp 5\sqrt{3} > 0$ nei due casi (sia con "+" che con "−"), allora occorre che $y > 0$. Quindi i vettori sono $((-8 \pm 5\sqrt{3})y, y)$ con $y > 0$.

353. Poniamo $\vec{v} = (x, y, z)$. Si deve avere

$\dfrac{(x, y, z) \cdot (0, -1, 1)}{|\,(x, y, z)\,|\,|\,(0, -1, 1)\,|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $(x, y, z) \cdot (1, 0, -2) = 0$ Da qui il sistema $\begin{cases} -y + z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

La prima equazione non ha evidentemente soluzioni se $-y + z < 0$ e può essere elevata a quadrato, ponendo però $-y + z \geq 0$

$\begin{cases} y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + y^2 + z^2 \\ x = 2z \end{cases}$ $\begin{cases} -2yz = x^2 \\ x = 2z \end{cases}$ Sostituendo $x = 2z$ al posto di x nella prima equazione: $\begin{cases} -2yz = 4z^2 \\ x = 2z \end{cases}$

Dato che la prima equazione è $z(-2y - 4z) = 0$, il sistema di secondo grado si spezza nell'unione dei due sistemi lineari $\begin{cases} z = 0 \\ x = 2z \end{cases}$ $\begin{cases} -2y = 4z \\ x = 2z \end{cases}$

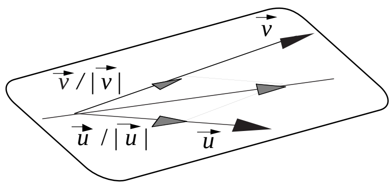
Le soluzioni sono $(0, y, 0)$ e $(2z, -2z, z)$, ma, per la condizione posta $-y + z \geq 0$, occorre nel primo caso che $-y \geq 0$, cioè $y \leq 0$ e nel secondo caso che $2z + z \geq 0$, cioè $z \geq 0$.

354. a. I vettori ortogonali a $\vec{v}$ sono $a(3, 1)$.

Si deve avere $\dfrac{\vec{u}_1 \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\,\vec{w} = \dfrac{a(3, 1) \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\,\vec{w}$, da cui $(-1/5)(2, 1) = (a \cdot 7/5)(2, 1)$ e quindi $a = -1/7$. Pertanto $\vec{u}_1 = (-3/7, -1/7)$.

b. Poniamo $\vec{u}_2 = (x, y)$. Allora $\dfrac{\vec{u}_2 \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\,\vec{w} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\,\vec{w}$, da cui $-\dfrac{1}{5}\,(2, 1) = \dfrac{2x + y}{5}\,(2, 1)$ e quindi le condizioni $2x + y = -1$ e $x^2 + y^2 = 1$ da cui $\vec{u}_2 = (-4/5, 3/5)$ oppure $\vec{u}_2 = (0, -1)$.

355. Occorre determinare la bisettrice dei due vettori nel loro piano. Se i due vettori hanno lo stesso modulo, allora un vettore della bisettrice è la loro somma, per cui basta normalizzarli. I vettori cercati sono quindi: $a\left(\dfrac{\vec{u}}{|\,\vec{u}\,|} + \dfrac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|}\right)$ con $a \in \mathbb{R}$. La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



356. Per proiettare sul sottospazio di dimensione 2 occorre una base ortonormale di $W = L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. I vettori di W sono del tipo $a(1, 2, 0) + b(0, -1, 1) = (a, 2a - b, b)$. Cerchiamo un vettore di W ortogonale a $\vec{u}_1$: $(a, 2a - b, b) \cdot (1, 2, 0) = 0$ da cui $5a = 2b$, per esempio $a = 2$, $b = 5$ e si ottiene il vettore $(2, -1, 5)$. Quindi una base ortogonale per W è per esempio $(1, 2, 0), (2, -1, 5)$ e una ortonormale è $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)/\sqrt{5}$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 5)/\sqrt{30}$.

La proiezione di $(1, 0, 0)$ su W è quindi $((1, 0, 0) \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + ((1, 0, 0) \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$.

L'angolo θ è tale che $\cos(\theta) = \dfrac{(1, 0, 0) \cdot (1/3, 1/3, 1/3)}{|\,(1, 0, 0)\,|\,|\,(1/3, 1/3, 1/3)\,|} = \sqrt{1/3}$ con $0 < \theta < 2\pi$.

Si ha $\theta \simeq 0.95$.

401. a. Sì: è definita mediante le forme lineari $x, y, \pi y$.
b. No: $f(0,0,0) \neq (0,0,0)$.
c. Sì: è l'applicazione costante nulla.
d. Si ha: $f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 \wedge \vec{w} + \vec{x}_2 \wedge \vec{w}$ $\quad f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \wedge \vec{w}$
e coincidono per la distributività del prodotto vettore.
Analogamente $af(\vec{x}) = a(\vec{x} \wedge \vec{w})$ $\quad f(a\vec{x}) = (a\vec{x}) \wedge \vec{w}$ quindi coincidono.
e. No: in generale $f(X) + f(Y) \neq f(X+Y)$.
Infatti esistono molte matrici X, Y tali che: $\det(X) + \det(Y) \neq \det(X+Y)$ (per esempio $X = I$ e $Y = I$). In questi casi:
$f(X)+f(Y) = (\det(X), 0)+(\det(Y), 0) = (\det(X) + \det(Y), 0)$ $\quad f(X+Y) = (\det(X+Y), 0)$
e sono differenti.
f. Si ha:
$f(X_1) + f(X_2) = AX_1A + AX_2A = A(X_1 + X_2)A$ $\quad f(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2)A$
quindi coincidono.
Analogamente $af(X) = a(AXA)$ $\quad f(aX) = A(aX)A$ quindi coincidono.
g. Sì: $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = a\Big(\vec{x}\cdot(1,2,0)\ ,\ \vec{x}\cdot(2,0,-1)\Big) + b\Big(\vec{y}\cdot(1,2,0)\ ,\ \vec{y}\cdot(2,0,-1)\Big) =$

$$= \Big(a\vec{x}\cdot(1,2,0)\ ,\ a\vec{x}\cdot(2,0,-1)\Big) + \Big(b\vec{y}\cdot(1,2,0)\ ,\ b\vec{y}\cdot(2,0,-1)\Big) =$$
$$= \underline{\Big(a\vec{x}\cdot(1,2,0) + b\vec{y}\cdot(1,2,0)\ ,\ a\vec{x}\cdot(2,0,-1) + b\vec{y}\cdot(2,0,-1)\Big)}$$
$$f(a\vec{x} + b\vec{y}) = \underline{\Big((a\vec{x} + b\vec{y})\cdot(1,2,0)\ ,\ (a\vec{x} + b\vec{y})\cdot(2,0,-1)\Big)}$$

e i due vettori sottolineati coincidono per le note proprietà dei prodotti scalari.

402. La matrice è quella a lato formata coi coefficienti delle forme lineari che definiscono f.
Il nucleo è costituito dai vettori (x,y,z) tali che $f(x,y,z) = 0$ cioè tali che $(x+y-z\ ,\ 2x-y\ ,\ 3x-z\ ,\ 3y-2z) = (0,0,0,0)$.
Quindi occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice, riducendola:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora è ridotta e le ∞^1 soluzioni sono: $\begin{cases} x = (1/3)z \\ y = (2/3)z \\ z = z \end{cases}$

Perciò $\ker(f) = \left\{\left(\frac{1}{3}z\ ,\ \frac{2}{3}z\ ,\ z\right)\right\} = \left\{\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ 1\right)z\right\}$. Una base per $\ker(f)$ è per esempio quella costituita dal vettore $(1/3, 2/3, 1)$ oppure dal vettore proporzionale $(1,2,3)$.
Quindi $\dim(\ker(f)) = 1$, per cui $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2$.
Per determinare una base per l'immagine, basta trovare due vettori linearmente indipendenti in $\mathrm{Im}\,(f)$. Calcoliamo ad esempio: $f(1,0,0) = (1,2,3,0)$; $f(0,1,0) = (1,-1,0,3)$.
I vettori $(1,2,3,0)$, $(1,-1,0,3)$ appartengono a $\mathrm{Im}\,(f)$, sono due, sono linearmente indipendenti, perché due e non proporzionali, pertanto costituiscono una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

403. Scriviamo la matrice associata A formata coi coefficienti delle forme lineari che definiscono f e riduciamola.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente la matrice ha caratteristica 2, quindi il nucleo ha dimensione $4 - 2 = 2$ ed è lo spazio generato da due qualunque soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato ad A. Il sistema ha le ∞^2 soluzioni $(3z + t\ ,\ -2z - t\ ,\ z\ ,\ t)$.
Per esempio i vettori $(1,-1,0,1)$ e $(3,-2,1,0)$ formano una base per il nucleo e così pure i vettori $(4,-3,1,1)$ e $(-1,1,0,-1)$, dato che, in entrambi i casi, sono due vettori linearmente indipendenti in uno spazio che ha dimensione 2.

L'immagine ha dimensione 2, quindi come base bastano due suoi vettori linearmente indipendenti. Per esempio calcoliamo $f(1,0,0,0) = (1,0,1,1)$, $f(0,1,0,0) = (1,1,2,0)$. I due vettori

$(1,0,1,1)$, $(1,1,2,0)$ sono vettori dell'immagine, sono linearmente indipendenti, perché due e non proporzionali, quindi $(1,0,1,1)$, $(1,1,2,0)$ è una base per l'immagine.
Analogamente i due vettori $(-1,2,1,-3)$, $(0,1,1,-1)$ (che sono rispettivamente $f(0,0,1,0)$ e $f(0,0,0,1)$) formano un'altra base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

I vettori v tali che $f(v) = (0,1,1,-1)$ sono quelli che risolvono il sistema a lato. Il sistema ha come matrice dei coefficienti A e come termini noti le coordinate del vettore in questione. Il sistema si riduce quindi con le stesse operazioni fatte su A, quindi basta prendere la matrice ridotta e applicare al vettore le stesse due operazioni elementari. Si ottiene la matrice ridotta a lato. Il sistema ridotto ha ∞^2 soluzioni cioè $(3z\ ,\ -2z-t\ ,\ z\ ,\ t+1)$.
L'analogo sistema per $(1,0,0,-1)$ non ha soluzioni e quindi non ci sono vettori il cui trasformato è $(1,0,0,-1)$.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+2z+t=1 \\ x+2y+z+t=1 \\ x-3z-t=-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

404. a. Se $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$, allora $\dim(\ker(f)) = 0$. Poiché $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f))$, allora $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 4$, ma questo non può mai succedere perché $\mathrm{Im}\,(f)$ è sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

b. Per ottenere $f(1,1,-2,0)$ occorre moltiplicare A per il vettore posto in forma di matrice colonna; si ottiene $f(1,1,-2,0) = (k-2\ ,\ k-2\ ,\ -k+4)$.
Analogamente $f(0,0,1,1) = (2\ ,\ 2\ ,\ k-4)$.
Coincidono se $k-2=2 \quad ; \quad k-2=2 \quad , \quad -k+4=k-4$.
In tutte le tre eguaglianze risulta $k=4$. Questo è l'unico k che soddisfa la richiesta.

c. Occorre la caratteristica di A, quindi la riduciamo; basta l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$.
La matrice è ora ridotta con 3 pivot per $k \neq 0,1,3$. Per questi valori, $\varrho(A) = 3$, quindi l'immagine ha dimensione 3 e il nucleo ha dimensione 1. Esaminiamo i tre casi particolari:

$$\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-3 & -3 \end{pmatrix}$$

• Se $k=3$, la matrice è ancora ridotta con 3 pivot, quindi $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$; $\dim(\ker(f)) = 1$

• Se $k=1$ la matrice è subito ridotta con due pivot se eliminiamo R_2 identica a R_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

• Se $k=0$ la matrice è subito ridotta con due pivot se eseguiamo $R_3 \to R_3 + 3R_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

In entrambi i casi $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2 \quad \dim(\ker(f)) = 2$

d. Basta esaminare il sistema che ha come matrice dei coefficienti A e come termini noti le coordinate del vettore $(1,0,1)$.
Il sistema si riduce quindi con le stesse operazioni fatte su A e si ottiene la matrice a lato in cui è stata fatta sulla colonna dei termini noti l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Per $k \neq 0,1,3$ il sistema è ridotto e ha soluzioni. Esaminando i tre casi particolari, si vede subito che ha soluzioni per $k=3$ e per $k=0$, ma non per $k=1$, quindi:
Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(f)$ se e solo se $k \neq 1$.

405. a. Per trovare $f(i,1,1)$ basta eseguire il prodotto:
Quindi $f(i,1,1) = (-2,2i)$.

$$\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

b. Riduciamo A: $\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - iR_1 \quad \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Quindi $\varrho(A) = 1$ da cui $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 1$ e $\dim(\ker(f)) = 2$.
Il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A: $\ker(f) = \{(-iz,y,z)\}$ e una sua base è $(-i,0,1),(0,1,0)$.
Una base per l'immagine è data per esempio dal vettore $(-2,2i)$ trovato sopra.

c. Per trovare i v tali che $f(v) = (1+i,1-i)$ risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1 & 1+i \\ 1 & 0 & i & 1-i \end{array}\right) R_2 \to R_2 - iR_1 \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le soluzioni sono $\left(\dfrac{z+1+i}{i}\ ,\ y\ ,\ z\right) = (-iz-i+1\ ,\ y\ ,\ z)$

406. Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le quattro condizioni perché i quattro vettori $(1,2,3,4)$, $(1,-1,1,1)$, $(0,0,2,3)$, $(0,0,5,-2)$ di cui è data l'immagine costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$, dato che la matrice delle coordinate dei quattro vettori ha determinante diverso da zero (il determinante è immediato, dato che è triangolare inferiore a blocchi).
I vettori trasformati $(0,0,0,0)$, $(1,1,1,1)$, $(2,3,4,-1)$, $(0,0,0,0)$ costituiscono un sistema di generatori per l'immagine. Basta scartare i due vettori nulli per avere due vettori non proporzionali che formano perciò una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.
Dato che $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}\,(f))$, allora il nucleo ha dimensione 2. Dalla definizione di f si vede subito che $f(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$ $\quad f(0,0,-5,2) = (0,0,0,0)$, quindi si ha $(1,2,3,4), (0,0,-5,2) \in \ker(f)$.
I due vettori, essendo non proporzionali, formano perciò una base per $\ker(f)$.

407. a. Perché i due vettori non proporzionali $(1,2), (1,1)$ formano una base per $\mathbb{R}^2$.

b. Esprimiamo $(1,0)$ e $(0,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,2)$ e $(1,1)$. Come si calcola facilmente:
$(1,0) = -(1,2) + 2(1,1)$ da cui
$f(1,0) = -f(1,2) + 2f(1,1) = -(0,2,2) + 2(2,1,0) = (4,0,-2)$
Analogamente:
$(0,1) = 1(1,2) - 1(1,1)$ da cui
$(0,1) = f(1,2) - f(1,1) = (0,2,2) - (2,1,0) = (-2,1,2)$
Poiché $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$, allora $\dim(\mathrm{Im}\,(f))$ non può essere più di 2.
Dalla definizione di f, è evidente che i due vettori $(0,2,2), (2,1,0)$ appartengono a $\mathrm{Im}\,(f)$; inoltre sono linearmente indipendenti perché non sono proporzionali, quindi $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2$ ed essi ne costituiscono una base.

408. a. Perché $(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^4$, dato che la matrice delle coordinate dei quattro vettori ha determinante diverso da zero (il determinante è immediato, dato che è triangolare inferiore).

b. I quattro vettori $(0,1,2,4)$, $(0,1,1,2)$, $(0,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ (trasformati dei vettori che definiscono l'applicazione) generano l'immagine, quindi per determinare $\dim(\mathrm{Im}\,(f))$ basta calcolare la caratteristica della matrice delle coordinate dei quattro vettori:
Si vede subito che la matrice ha determinante 0 e che c'è una sottomatrice 3×3 con determinante diverso da zero, quindi la caratteristica è 3.
Pertanto $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$ $\quad$ e $\quad \dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 1$
Una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ si può estrarre dai quattro vettori che la generano.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{2-4} 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La sottomatrice inquadrata con determinante non nullo mostra che i tre ultimi vettori $(0,1,1,2)$, $(0,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base per l'immagine.

c. Per questo occorre conoscere la matrice associata A. per scrivere A bisogna calcolare $f(v)$ per ogni vettore v della base canonica. Calcoliamo allora:
- $f(0,0,0,1) = \underline{(1,0,1,0)}$ (immediato dalla quarta uguaglianza che definisce f).
- $f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1) - f(0,0,0,1) = (0,1,0,0) - (1,0,1,0) = \underline{(-1,1,-1,0)}$
- $f(0,1,0,0) = f(0,1,1,1) - f(0,0,1,1) = (0,1,1,2) - (0,1,0,0) = \underline{(0,0,1,2)}$
- $f(1,0,0,0) = f(1,1,1,1) - f(0,1,1,1) = (0,1,2,4) - (0,1,1,2) = \underline{(0,0,1,2)}$.

Le colonne della matrice sono le immagini dei vettori della base canonica. Immediatamente si ha:
$f(x,y,z,t) = (-z-t\ ,\ z\ ,\ x+y-z+t\ ,\ 2x+2y)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Senza risolvere il sistema associato alla matrice, si può notare che $f(1,0,0,0) = f(0,1,0,0)$ dato che la prima e la seconda colonna della matrice coincidono, per cui $f(1,0,0,0) - f(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$
Per la linearità di f, allora $f(1,-1,0,0) = (0,0,0,0)$. Quindi $(1,-1,0,0)$ appartiene al nucleo e ne forma una base, dato che, come abbiamo già visto, il nucleo ha dimensione 1.

409. Una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ è per esempio $(1,0,1)$, $(1,-1,0)$. Occorre poi che $f(1,1,1) = (0,0,0)$. Ovviamente una sola condizione non basta. Per completare la definizione di f, completiamo a base il vettore $(1,1,1)$ per esempio con $(0,1,0), (0,0,1)$. Quindi f può essere definita in uno

dei seguenti due modi:

$f_1(1,1,1) = (0,0,0)$; $f_1(0,1,0) = (1,0,1)$; $f_1(0,0,1) = (1,-1,0)$

$f_2(1,1,1) = (0,0,0)$; $f_2(0,1,0) = (1,-1,0)$; $f_2(0,0,1) = (1,0,1)$.

Le due applicazioni lineari sono completamente definite perché $(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, sono evidentemente distinte ed è anche chiaro che il loro nucleo e la loro immagine sono quelle richieste.

410. Completiamo $(1,0,0,1),(0,1,2,2)$ base di $\mathbb{R}^4$ per esempio con $(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ e consideriamo per esempio l'applicazione lineare definita a lato. È chiaro che $\ker(f) = L\{(1,0,0,1),(0,1,2,2)\}$ e che anche $\mathrm{Im}\,(f) = L\{(1,0,0,1),(0,1,2,2)\}$.

$$\begin{array}{|l} f(1,0,0,1) = (0,0,0,0) \\ f(0,1,2,2) = (0,0,0,0) \\ f(0,0,1,0) = (1,0,0,1) \\ f(0,0,0,1) = (0,1,2,2) \end{array}$$

L'applicazione lineare f è completamente definita perché $(1,0,0,1)$, $(0,1,2,2)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ è una base per $\mathbb{R}^4$.

411. Si ha subito: $f(1,1,1) = (1,0,2)$ e $f(0,1,2) = (0,0,0)$.
Le due condizioni non definiscono completamente un'applicazione lineare, perché $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ non è base per $\mathbb{R}^3$.
Occorre completare i due vettori linearmente indipendenti a base, il che si può fare in molti modi, per esempio scegliamo come terzo vettore $(0,0,1)$. Ora l'applicazione lineare è definita dalle tre condizioni a lato.

$$\begin{array}{|l} f(1,1,1) = (1,0,2) \\ f(0,1,2) = (0,0,0) \\ f(0,0,1) = (0,1,3) \end{array}$$

Che soddisfi la prima e la terza condizione è evidente. L'immagine ha dimensione 2, dato che è generata da $(1,0,2),(0,1,3)$, quindi il nucleo ha dimensione 1. Poiché $(0,1,2) \in \ker(f)$, allora $\ker(f) = L\{(0,1,2)\}$, come richiesto.

412. Da $f(1,2,0) = f(0,0,-1)$ si ha: $f(1,2,0) - f(0,0,-1) = (0,0,0)$.
Per la linearità $f((1,2,0) - (0,0,-1)) = (0,0,0)$.
Quindi si ha $f(1,2,1) = (0,0,0)$ per cui $(1,2,1) \in \ker(f)$.
Se quindi poniamo $\ker(f) = L\{(1,2,1)\}$ e $\mathrm{Im}\,(f) = L\{(1,2,1),(0,0,-1)\}$ si hanno tutte le condizioni richieste. Completiamo allora $(1,2,1)$ a base di $\mathbb{R}^3$ per esempio con $(0,1,0),(0,0,-1)$.
L'applicazione può per esempio essere così definita:
$f(1,2,1) = (0,0,0)$ $f(0,1,0) = (1,2,1)$ $f(0,0,1) = (0,0,-1)$.
L'applicazione è completamente definita perché $(1,2,1),(0,1,0),(0,0,-1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e soddisfa le condizioni date perché perché l'immagine ha dimensione 2 e contiene il nucleo che ha dimensione 1.

413. a. No, perché $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$.
b. Sì, per esempio l'applicazione identicamente nulla, in cui $\ker(f) = \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{Im}\,(f) = \{(0,0,0)\}$

414. Completiamo $(1,1,1)$ a base per $\mathbb{R}^3$ per esempio con $(0,1,0),(0,0,1)$ e definiamo f su questa base. Cerchiamo quindi due altri vettori di $\mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti con $(1,2,0,-1)$ per esempio $(0,0,1,1),(1,1,0,0)$, e poniamo

$$f(1,1,1) = (1,2,0,-1) \qquad f(0,1,0) = (0,0,1,1) \qquad f(0,0,1) = (1,1,0,0).$$

L'applicazione f è completamente definita perché $(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
Evidentemente $\mathrm{Im}\,(f) = L\{(1,2,0,-1)\,,\,(0,0,1,1)\,,\,(1,1,0,0)\}$.
Il vettore $(1,0,0,0)$ non appartiene a $\mathrm{Im}\,(f)$ perché come si verifica subito il sistema lineare associato alla matrice non ha soluzioni. Analogamente nessuno degli altri tre vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ sta in $\mathrm{Im}\,(f)$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dato poi che $\mathrm{Im}\,(f)$ ha dimensione 3, allora $\dim(\ker(f)) = 0$ per cui $\ker(f) = \{0,0,0\}$.
La scelta dei due vettori di $\mathbb{R}^4$ è stata fatta in modo casuale. Se per caso un qualche vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$ appartenesse a $\mathrm{Im}\,(f)$, occorrerebbe modificare questa scelta.

415. Esprimiamo $(2,k)$ come combinazione lineare dei due vettori $(1,1),(0,1)$ che costituiscono base per $\mathbb{R}^2$. Si ha: $(2,k) = 2(1,1) + (k-2)(0,1)$.
Quindi $f(2,k) = 2f(1,1) + (k-2)f(0,1) = 2(3,1,1) + (k-2)(0,1,1) = (6,k,k)$
Vediamo ora per quali k il vettore $(6,k,k)$ appartiene a $L\{(1,-1,0),(2,1,-1)\}$
Scriviamo l'eguaglianza $(6,k,k) = x(1,-1,0) + y(2,1,-1)$. Questo è un sistema lineare in x,y che, come si verifica subito, ha soluzioni solo per $k = -3/2$. Quindi questo è l'unico k per cui esiste la f.

$$\begin{cases} 6 = x + 2y \\ k = -x + y \\ k = -y \end{cases}$$

416. I quattro vettori $(1,2,2),(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)$ sono linearmente dipendenti (quattro vettori in $\mathbb{R}^3$) ed è possibile trovare la loro relazione di lineare dipendenza (unica a meno di fattori di proporzionalità):
$(1,2,2)=(1,0,1)+(0,1,0)+(0,1,1)$
Se esistesse f lineare che soddisfa le quattro condizioni, applicando la f si avrebbe:
$f(1,2,2)=f(1,0,1)+f(0,1,0)+f(0,1,1)$ cioè
$(4,5,6)=(3,0,1)+(0,0,1)+(0,1,0)$
E tale relazione è falsa, come si verifica immediatamente.

417. I tre vettori $(1,1,2),(0,1,1),(1,0,1)$ sono linearmente dipendenti, dato che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante zero. A questo punto occorre la loro relazione di lineare dipendenza (essenzialmente unica, a meno di fattore di proporzionalità) che è, come si calcola: $(1,1,2)-(0,1,1)-(1,0,1)=(0,0,0)$
La relazione è compatibile con la linearità di f dato che, applicando f si ottiene:
$f(1,1,2)-f(0,1,1)-f(1,0,1)=f(0,0,0)$ ovvero
$(2,2,1)-\ (0,1,1)-\ (2,1,0)=\ (0,0,0)$
L'applicazione lineare non è unica perché le tre condizioni si riducono a due sole, le prime due. Per avere un'applicazione lineare che soddisfi l'ultima condizione occorre completare a base i due vettori linearmente indipendenti $(1,1,2),(0,1,1)$ cosa fattibile in molti modi, per esempio mediante il vettore $(0,0,1)$.
Dato che $(1,1,2),(0,1,1)$ non appartengono a $\ker(f)$, allora $(0,0,1)$ dovrà far parte del nucleo.
A questo punto definiamo l'applicazione lineare mediante le tre condizioni seguenti:
$f(1,1,2)=(2,2,1)\qquad f(0,1,1)=(0,1,1)\qquad f(0,0,1)=(0,0,0).$
Il nucleo è quello assegnato, perché l'immagine ha dimensione due, dato che è generata dai due vettori $(2,2,1),(0,1,1)$, quindi il nucleo ha dimensione 1.

421. a. Basta calcolare $\begin{pmatrix}-1&2&4\\-2&4&8\\-1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\14\\7\end{pmatrix}$ Quindi $f(1,2,1)=(7,14,7)$. Notiamo che $(1,2,1)$ è autovettore e che l'autovalore è 7.

b. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice. Si possono subito eliminare la terza riga identica alla prima e la seconda che è proporzionale alla prima.

Il sistema si riduce subito all'unica equazione $-x+2y+4z=0$, è ridotto e ha ∞^2 soluzioni dipendenti da y e z. Le soluzioni sono: $(2y+4z\ ,\ y\ ,\ z)$.

I vettori di $\ker(f)$ sono quindi $y(2,1,0)+z(4,0,1)$, perciò i vettori $(2,1,0)$ e $(4,0,1)$ generano $\ker(f)$.
Essendo linearmente indipendenti in quanto due e non proporzionali, allora costituiscono una base.

Quindi $\ker(f)=L\{(2,1,0)\ ,\ (4,0,1)\}$ e $\mathcal{B}:(2,1,0)\ ,\ (4,0,1)$ ne è una base.

c. Abbiamo: $\dim(\operatorname{Im}(f))=3-\dim(\ker(f))=1$
Quindi una base per $\operatorname{Im}(f)$ sarà formata da un suo qualunque vettore non nullo. Per esempio si ha: $f(1,0,0)=(-1,-2,-1)$ (prima colonna della matrice).

Quindi $(-1,-2,-1)$ è una base per $\operatorname{Im}(f)$.

d. Dato che il nucleo di f è diverso dallo spazio nullo, allora 0 è un autovalore per f e $\ker(f)=V_0$. Per quanto riguarda la sua molteplicità, visto che $\dim(V_0)\le$ molteplicità(0) ha dimensione 2, allora la molteplicità dev'essere almeno 2.

Dato che poi, come abbiamo già calcolato, $f(1,2,1)=(7,14,7)$, allora $(1,2,1)$ è autovettore e quindi $\lambda=7$ è autovettore con molteplicità almeno 1. L'unica possibilità affinché la somma delle molteplicità sia 3 è che gli autovalori siano:
$\lambda_1=0$ con molteplicità 2 $\qquad\lambda_2=7$ con molteplicità 1

e. A è diagonalizzabile perché, come abbiamo già rilevato:
- $\lambda_1=0$ è autovalore con molteplicità 2 e $\dim(V_0)=\dim(\ker(f))=2$
- $\lambda_2=7$ è autovalore con molteplicità 1 e se la molteplicità è 1, sicuramente $\dim(V_7)=1$

Una base di autovettori può essere costruita mettendo insieme la base di V_0: $(2,1,0),(4,0,1)$ e una base di V_7, per esempio $(1,2,1)$ (che, come abbiamo visto, è autovettore).

La matrice P avrà nelle colonne le coordinate dei vettori della base di autovettori e la matrice diagonale D avrà sulla diagonale gli autovettori corrispondenti. $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

422. a. Per determinare una base per $\ker(f)$ basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice. Ha ∞^1 soluzioni e sono $(-z, -z, z)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$. Quindi una base per $\ker(f)$ è $(1, 1, -1)$.

b. Si vede immediatamente, eseguendo il prodotto $A \cdot [1 \ -1 \ 0]^T$, che $f(1, -1, 0) = (3, -3, 0)$, quindi $(1, -1, 0)$ è autovettore e l'autovalore relativo è 3.

c. Il fatto che $\ker(f)$ sia diverso da $\{(0, 0, 0)\}$ dice che 0 è autovalore per f. D'altra parte abbiamo appena visto che anche 3 è autovalore. Potrebbe esserci un terzo autovalore non evidente, ma, prima di calcolare il polinomio caratteristico, determiniamo gli autospazi:

- $\boxed{\lambda = 0}$ L'autospazio è il nucleo $L\{(1, 1, -1)\}$.
- $\boxed{\lambda = 3}$ La matrice $A - 3I$ a lato ha evidentemente caratteristica 1, quindi il sistema omogeneo associato ha ∞^2 soluzioni che costituiscono l'autospazio. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Le soluzioni sono $(-y + z \ , \ y \ , \ z)$, quindi l'autospazio è $L\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$. Dato che $\dim(V_3) = 2$, ne concludiamo che la molteplicità di 3 come autovalore è almeno 2 ed è proprio 2, perché evidentemente non può essere superiore.
Quindi il polinomio caratteristico è $-x(x - 3)^2$. Mettendo insieme i tre autovettori, il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura (anche senza verificarne la lineare indipendenza) che $\mathcal{B} : (1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, tutta fatta di autovettori.

423. A Dato che A è triangolare superiore, il polinomio caratteristico si calcola immediatamente ed è $(1 - x)(2 - x)(4 - x)$. Quindi A ha i tre autovalori distinti $1, 2, 4$, ed è diagonalizzabile per il criterio fondamentale.

B Dato che B è triangolare superiore a blocchi e il blocco superiore è a sua volta triangolare inferiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $(4 - x)(1 - x)(3 - x)$. Quindi B ha i tre autovalori distinti $1, 2, 4$, ed è diagonalizzabile per il criterio fondamentale.

C Dato che C è triangolare superiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $(2 - x)^3$. Quindi C ha l'autovalore 2 con molteplicità 3. Se C fosse diagonalizzabile, si avrebbe $\dim(V_2) = 3$, da cui $\varrho(A - 2I) = 0$, cioè $A - 2I = 0$, ma evidentemente $A \neq 2I$, quindi C non è diagonalizzabile.

D La matrice D è diagonalizzabile, dato che è simmetrica.

E Dato che E è triangolare inferiore a blocchi e il blocco inferiore è a sua volta triangolare superiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $x^2(1-x)$. Quindi E ha ha l'autovalore 0 con molteplicità 2. Se fosse diagonalizzabile, si avrebbe $\dim(V_0) = 2$, da cui $\varrho(E - 0I) = 1$, cioè $\varrho(E) = 1$, ma evidentemente $\varrho(E) = 2$, quindi E non è diagonalizzabile.

F Il polinomio caratteristico di F è $-x^3 + 3$, quindi gli autovalori sono le radici cubiche di 3. Due radici sono non reali. Quindi F non è diagonalizzabile come matrice reale, ma, dato che le radici cubiche di 3 sono distinte, allora è diagonalizzabile come matrice complessa per il criterio fondamentale.

424. Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le tre condizioni perché i tre vettori $(0, 1, -2)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 1, 1)$ di cui è data l'immagine costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, dato che la matrice delle coordinate non ha determinante 0. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Notiamo poi che ognuno di essi è autovettore (autovalori rispettivamente -1 , $1/3$, 0), quindi esistendo base di autovettori, f è diagonalizzabile.

425. I tre vettori $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$ di cui è data l'immagine sono linearmente dipendenti perché la matrice delle coordinate ha determinante 0. Quindi esiste una relazione di lineare dipendenza tra essi che è, come si calcola: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$2(1, 1, 1) - (1, 0, 2) - (1, 2, 0) = (0, 0, 0)$
La relazione non è compatibile con la linearità di f dato che, applicando f si otterrebbe:

$2f(1,1,1) - f(1,0,2) - f(1,2,0) = f(0,0,0)$ ovvero
$2(0,0,0) - (1,0,2) - (2,4,0) = (0,0,0)$
La relazione è falsa, pertanto non esiste alcuna f lineare che soddisfa le condizioni date.

426. La seconda condizione si può scrivere come $f(1,0,2) = (0,0,0)$. Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le tre condizioni perché i tre vettori $(1,1,0)$, $(1,0,2)$, $(1-i\ ,\ 1\ ,\ -i)$ di cui è data l'immagine costituiscono una base di $\mathbb{C}^3$, dato che la matrice delle coordinate non ha determinante 0.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -i \end{pmatrix}$$
Notiamo poi che ognuno di essi è autovettore (autovalori rispettivamente 2 , 0 , i), quindi esistendo base di autovettori, f è diagonalizzabile.

427. a. L'applicazione deve essere definita così per soddisfare la condizione su nucleo e immagine:
$f(1,0,2) = (0,0,0) \qquad f(v_2) = (1,1,1) \qquad f(v_3) = (1,0,2)$
a condizione che $(1,0,2), v_2, v_3$ sia una base per $\mathbb{R}^3$. Per soddisfare la condizione sull'autovalore, occorre porre $v_2 = (1/2, 1/2, 1/2)$. Come vettore v_3 scegliamone uno della base canonica, per esempio $v_3 = (0,0,1)$. Quindi:
$f(1,0,2) = (0,0,0) \qquad f(1/2,1/2,1/2) = (1,1,1) \qquad f(0,0,1) = (1,0,2)$
o anche $f(1,0,2) = (0,0,0) \qquad f(1,1,1) = (2,2,2) \qquad f(0,0,1) = (1,0,2)$
L'applicazione è completamente definita perché $(1,0,2), (1,1,1), (0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ed è anche chiaro che soddisfa le condizioni richieste.

b. Per scrivere la matrice occorre calcolare $f(v)$ per ogni vettore v della base canonica. Ogni vettore della base canonica va espresso come combinazione lineare dei vettori della base $(1,0,2), (1,1,1), (0,0,1)$.
Scriviamo: $(1,0,0) = a(1,0,2) + b(1,1,1) + c(0,0,1)$ da cui il sistema che ha la soluzione $a = 1$; $b = 0$; $c = -2$ quindi:
$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 0 = b \\ 0 = 2a + b + c \end{cases}$$
$(1,0,0) = 1(1,0,2) - 2(0,0,1)$
$f(1,0,0) = 1f(1,0,2) - 2f(0,0,1) = \underline{(-2,0,-4)}$
Scriviamo: $(0,1,0) = a(1,0,2) + b(1,1,1) + c(0,0,1)$ da cui il sistema che ha la soluzione $a = -1$; $b = 1$; $c = 1$ quindi:
$$\begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = b \\ 0 = 2a + b + c \end{cases}$$
$(0.1,0) = -1(1,0,2) + (1,1,1) + (0,0,1)$
$f(0,1,0) = -f(1,0,2) - f(1,1,1) + f(0,0,1) = \underline{(3,2,4)}$
Invece $f(0,0,1) = \underline{(1,0,2)}$ fa parte della definizione.
La matrice ha nelle colonne le coordinate dei vari $f(v)$.
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c. Il polinomio caratteristico è $-(x-2)x^2$, quindi $\lambda = 0$ ha molteplicità due, ma l'autospazio è $V_0 = \ker(f)$ che per costruzione ha dimensione 1. Quindi f non è diagonalizzabile.

d. Non è possibile, perché formebbero una base di autovettori, mentre, come abbiamo visto, f non è diagonalizzabile.

e. Questo è invece possibile. Per esempio $(1,0,2), (1,1,1), (2,2,2)$.

428. Come nel problema precedente, poniamo:
$f(1,1,1) = (0,1,1) \qquad f(v_2) = (0,1,1) \qquad f(v_3) = (0,1,2)$
a condizione che $(1,1,1), v_2, v_3$ sia una base per $\mathbb{R}^3$. Per soddisfare la condizione sugli autovalori poniamo *per esempio* $v_2 = (0, 1/2, 1/2)$ e $v_3 = (0, 1/3, 2/3)$.

Quindi l'applicazione può essere definita così:

$f(1,1,1) = (0,1,1) \qquad f(0,1/2,1/2) = (0,1,1) \qquad f(0,1/3,2/3) = (0,1,2)$ oppure
$f(1,1,1) = (0,1,1) \qquad f(0,1,1) = (0,2,2) \qquad f(0,1,2) = (0,3,6)$
Dato che $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2$, allora $\dim(\ker(f)) = 1$, per cui $\ker(f)) \neq \{(0,0,0)\}$, pertanto 0 è autovalore.
Gli autovalori sono quindi, per costruzione $0, 2, 3$ tutti con molteplicità 1. Per il criterio di diagonalizzabilità, f è diagonalizzabile avendo 3 autovalori distinti.

L'applicazione f è necessariamente diagonalizzabile, indipendentemente dalle due scelte effettuate, perché i tre vettori linearmente indipendenti mediante la quale è stata definita sono sempre autovettori e un'applicazione che ha una base di autovettori è, per definizione, diagonalizzabile.

429. a. Completiamo a base di $\mathbb{R}^3$ i due vettori $(1,0,2),(0,1,-1)$ per esempio con $(0,0,1)$. Ponendo $f(0,0,1)=(0,0,1)$ si ottiene che 1 sia autovalore.

L'applicazione lineare può essere definita mediante le relazioni a lato ed è del tutto definita, perché $(1,0,2),(0,1,-1),(0,0,1)$ è base per $\mathbb{R}^3$. È chiaro che in questo modo $(1,0,2)$ e $(0,1,-1)$ sono autovettori relativi all'autovalore $\lambda=3$.

$$\left|\begin{array}{ll} f(1,0,2) & =(3,0,6) \\ f(0,1,-1) & =(0,3,-3) \\ f(0,0,1) & =(0,0,1) \end{array}\right.$$

b. Se f ha gli autovalori 1 e 3, il polinomio caratteristico è $(x-1)^n(x-3)^m$ e dev'essere $m\geq 2$, dato che $\dim(V_3)=2$. L'unica possibilità è che il polinomio caratteristico sia $(x-1)(x-3)^2$. Si ha $\dim(V_3)=2$ perché richiesto dal problema e $\dim(V_1)=1$, perché quando la molteplicità di un autovalore è 1, allora si ha sempre l'uguaglianza.

È ora chiaro che f dev'essere diagonalizzabile poiché soddisfa il criterio di diagonalizzabilità.

c. Per scrivere la matrice occorre calcolare $f(v)$ per ogni vettore v della base canonica.

$(1,0,0)=(1,0,2)-(0,0,2)$ da cui

$f(1,0,0)=f(1,0,2)-f(0,0,2)=(3,0,6)-(0,0,2)=\underline{(3,0,4)}$

$(0,1,0)=(0,1,-1)+(0,0,1)$ da cui

$f(0,1,0)=f(0,1,-1)+f(0,0,1)=(0,3,-3)+(0,0,1)=\underline{(0,3,-2)}$

$f(0,0,1)=\underline{(0,0,1)}$ dalla definizione.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

431. a. Le tre condizioni si possono così scrivere:

$$f(\vec{\imath}+\vec{\jmath})=\vec{0} \qquad f(\vec{\imath}-2\vec{k})=-2\vec{\imath}+4\vec{k} \qquad f(\vec{k})=4\vec{\imath}$$

Le condizioni definiscono un'unica applicazione lineare, perché i tre vettori $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{\imath}-2\vec{k}$, $\vec{k}$ formano una base per V_3. Identificando V_3 con $\mathbb{R}^3$ nel modo standard le tre condizioni diventano: $f(1,1,0)=(0,0,0)$ $f(1,0,-2)=(-2,0,4)$ $f(0,0,1)=(4,0,0)$.

b. Per calcolare gli autovettori di f bisogna determinare la matrice associata e quindi occorrono $f(\vec{\imath}),f(\vec{\jmath}),f(\vec{k})$.

Scriviamo: $(1,0,0)=a(1,1,0)+b(1,0,-2)+c(0,0,1)$.

Si trova che: $a=0$; $b=1$; $c=2$ quindi: $(1,0,0)=(1,0,-2)+2(0,0,1)$.

$$f(1,0,0)=f(1,0,-2)+2f(0,0,1)=(6,0,4)$$

Scriviamo: $(0,1,0)=a(1,1,0)+b(1,0,-2)+c(0,0,1)$.

Si trova che: $a=1$; $b=-1$; $c=-2$ quindi: $(0,1,0)=(1,1,0)-(1,0,-2)-2(0,0,1)$.

$$f(0,1,0)=f(1,1,0)-f(1,0,-2)-2f(0,0,1)=(-6,0,-4)$$

$f(0,0,1)=(4,0,0)$ già noto.

Da questi dati si ricava la matrice A.

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $0,-2,8$ e gli autovettori relativi sono:

$\boxed{\lambda=0}$: $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ e i suoi multipli (dalla definizione)

$\boxed{\lambda=-2}$: $\vec{\imath}-2\vec{k}$ e i suoi multipli (dalla definizione)

$\boxed{\lambda=8}$: $2\vec{\imath}+\vec{k}$ e i suoi multipli (risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-8I$).

Si vede subito che gli ultimi due sono tra loro ortogonali, quindi due autovettori ortogonali di modulo 1 sono i loro normalizzati: $\dfrac{\vec{\imath}-2\vec{k}}{\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{2\vec{\imath}+\vec{k}}{\sqrt{5}}$

432. a. Perché $(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,2)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, dato che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante diverso da zero (è triangolare superiore a blocchi).

b. È chiaro che $(1,-1,0)$ è autovettore e che l'autovalore è -1 e che anche $(1,1,2)$ è autovettore e che l'autovalore è 5

c. Per questo occorre calcolare $f(v)$ per ogni vettore v della base canonica.

Ogni vettore della base canonica va espresso come combinazione lineare dei vettori della base $(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,2)$.

Per abbreviare i conti possiamo per esempio notare che $(1,1,0)+(1,-1,0)=(2,0,0)$. Quindi $f(1,1,0)+f(1,-1,0)=f(2,0,0)$ da cui $(1,1,4)+(-1,1,0)=f(2,0,0)$ ovvero $(0,2,4)=f(2,0,0)$ e quindi $f(1,0,0)=\underline{(0,1,2)}$.

Conoscendo $f(1,0,0)$ è facile ricavare $f(0,1,0)$:

$f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(0,1,0) = (1,1,4) - (0,1,2) = \underline{(1,0,2)}$

Infine $(0,0,2) = (1,1,2) - (1,1,0)$ cioè $f(0,0,2) = f(1,1,2) - f(1,1,0) = (5,5,10) - (1,1,4)$.
In definitiva $f(0,0,2) = (4,4,6)$ e pertanto $f(0,0,1) = \underline{(2,2,3)}$.

Per concludere $f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) = (2y+z\ ,\ x+2z\ ,\ 2x+2y+3z)$

d. Dai conti fatti sopra si scrive subito A.

e. La matrice è sicuramente diagonalizzabile perché simmetrica.
Abbiamo già visto che 5 e -1 sono autovalori.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Potrebbe esserci un terzo autovalore non evidente, ma, prima di calcolare il polinomio caratteristico, determiniamo gli autospazi:

- $\boxed{\lambda = -1}$ La matrice $A+I$ ha tre righe proporzionali, quindi ha caratteristica 1 e il sistema omogeneo associato riduce immediatamente all'unica equazione $x + y + 2z = 0$ che ha ∞^2 soluzioni, tra cui una è, come già notato $(1,-1,0)$ e un'altra linearmente indipendente è per esempio $(2,0,1)$. Da qui si deduce che il terzo autovalore è sempre -1.
- $\boxed{\lambda = 5}$ Riduciamo la matrice $A - 5I$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \; R_1 \leftrightarrow R_2 \; \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \; \begin{matrix} R_2 \to R_2 + 5R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix} \; \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

La matrice ha quindi caratteristica 2 e le soluzioni del sistema omogeneo associato sono $(z/2, z/2, z)$. Un autovettore è quindi per esempio $(1,1,2)$

La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei tre autovettori in colonna.
La matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

433. a. $\lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) = \underline{(\lambda_1 X_1 \cdot B + \lambda_2 X_2 \cdot B)}$
$f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \underline{(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) \cdot B}$
e le due matrici sottolineate notoriamente coincidono.

b. Per calcolare $\ker(f)$ si pone

$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui $\begin{cases} x = 2y \\ z = 2t \end{cases}$ sistema con ∞^2 soluzioni

Quindi $\dim(\ker(f)) = 2$ e una base per il nucleo è per esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Di conseguenza $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(M_{22}) - \dim(\ker(f)) = 2$.

Una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ è per esempio $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (sono rispettivamente $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sono due e linearmente indipendenti).

c. Occorre calcolare <u>nell'ordine</u> $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si ha: $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha coordinate $[1\ \ -2\ \ 0\ \ 0]^T$ rispetto alla base "canonica". Analogamente si calcolano gli altri. La matrice associata è quindi la matrice a blocchi A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

d. La matrice A associata a f è a blocchi e i due blocchi sono identici e sono la matrice B. Quindi A è diagonalizzabile se lo è B. La matrice B è diagonalizzabile perché è simmetrica. Il polinomio caratteristico di B è $x^2 - 5x$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 0$.
Per $\lambda = 5$ un autovettore di B è $(1,-2)$, quindi due autovettori di f sono quelli con coordinate $[1\ -2\ 0\ 0]^T$ $[0\ 0\ 1\ -2]^T$ corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ che generano V_5.
Per $\lambda = 0$, gli autovettori sono le matrici del nucleo, di cui abbiamo già trovato una base.

434. La verifica della linearità è analoga a quella del problema precedente.
Per quanto riguarda il nucleo, evidentemente $X \in \ker(f)$ se $X \cdot B = B \cdot X$, se cioè X commuta con B.
Per esempio I e B stessa commutano con B, quindi appartengono a $\ker(f)$. Dato che in $\ker(f)$ ci sono due vettori linearmente indipendenti, allora il nucleo ha almeno dimensione 2.

Calcoliamo ora: $f\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\&0\,2\end{pmatrix}$.
Questi vettori sono linearmente indipendenti e appartengono a $\mathrm{Im}\,(f)$. Quindi anche $\mathrm{Im}\,(f)$ ha almeno dimensione 2.
In conclusione $\dim(\ker(f))=\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2$ e abbiamo già trovato una base per entrambi.

435. a. Per scrivere la matrice occorre calcolare le immagini dei vettori che sono identificati con la base canonica nell'ordine giusto. Cominciamo con $\mathcal{B}$

$f\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}$ e ha coordinate $[1\ 0\ 0\ 0]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$. Proseguendo:

$f\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\,1\\0\,0\end{pmatrix}\quad f\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,0\\1\,0\end{pmatrix}\quad f\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

La matrice associata è quindi A.
Se invece usiamo l'identificazione attraverso $\mathcal{B}_1$, le immagini dei vettori sono le stesse, ma vanno calcolate in un altro ordine (scambiando le due centrali e le matrici immagine vanno lette per colonne. La matrice risulta perciò A_1.

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

b. La matrice A_1 è a blocchi e ogni blocco è la matrice E, quindi conviene lavorare su A_1. La matrice A_1 è diagonalizzabile se lo è E. Il polinomio caratteristico di E è $(x-1)^2$, quindi ha l'unico autovalore $\lambda_1=0$ con molteplicità 1, ma $\varrho(E-I)=1$, quindi E non è diagonalizzabile e non lo sono neppure A_1 e A.
Comunque due autovettori per f si vedono subito e sono le due matrici che generano l'unico autospazio e quindi tutti gli autovettori. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

441. Associamo la matrice a un'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

a. Il polinomio caratteristico è $(3-x)(3-x)-16=x^2-6x-7$ che ha le radici -1 e 7 entrambe con molteplicità 1.
L'autospazio relativo a $\lambda=-1$ ha quindi dimensione 1 ed è dato dalle soluzioni del sistema associato alla matrice $A+I=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$. Una soluzione è per esempio $v=(1,-1)$.
L'autospazio relativo a $\lambda=7$ ha quindi dimensione 1 ed è dato dalle soluzioni del sistema associato alla matrice $A-7I=\begin{pmatrix}-4&4\\4&-4\end{pmatrix}$. Una soluzione è per esempio $w=(1,1)$.

b. Si ha $\quad f^{100}(v)=(-1)^{100}v=v=(1,-1)\qquad f^{100}(w)=7^{100}w=(7^{100},7^{100})$

c. Esprimiamo $(1,0)$ come combinazione lineare di v e w:
$(1,0)=a(1,-1)+b(1,1)$ da cui $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2}$. Si ha quindi: $(1,0)=\dfrac{1}{2}\,v+\dfrac{1}{2}\,w$ da cui:

$${}^{100}(1,0)=\frac{1}{2}f^{100}(v)+\frac{1}{2}f^{100}(w)=\frac{1}{2}(1,-1)+\frac{1}{2}(7^{100},7^{100})=\left(\frac{7^{100}+1}{2}\,,\,\frac{7^{100}-1}{2}\right)$$

442. a. I tre vettori $(2,1,0),(1,1,0),(1,0,0)$ che definiscono f sono evidentemente linearmente dipendenti, avendo la terza componente nulla. Le condizioni sono:

$$\begin{array}{l|l|l}
f(2,1,0)=(4,2,0) & \text{Si vede subito che} & f(2,1,0)-f(1,1,0)=\ f(1,0,0)\\
f(1,1,0)=(3,1,0) & (2,1,0)-(1,1,0)=(1,0,0) & \quad = \qquad\quad = \qquad\quad =\\
f(1,0,0)=(-3,-1,2) & \text{ma si ha:} & (4,2,0)\ -\ (3,1,0)\ \neq(-3,-1,2)
\end{array}$$

b. Anche qui i tre vettori sono linearmente dipendenti. Le condizioni sono:

$$\begin{array}{l|l|l}
f(2,1,0)=(4,2,0) & \text{C'è sempre la relazione} & f(2,1,0)-f(1,1,0)=f(1,0,0)\\
f(1,1,0)=(3,1,0) & (2,1,0)-(1,1,0)=(1,0,0) & \quad = \qquad\quad = \qquad\quad =\\
f(1,0,0)=(1,1,0) & \text{ma stavolta:} & (4,2,0)\ -\ (3,1,0)\ =\ (1,1,0)
\end{array}$$

Le condizioni si riducono quindi a due, quindi esistono infinite applicazioni lineari che le soddisfano.

c. Le tre condizioni sono

$$\begin{array}{l|l|l}
f(2,1,0)=(4,2,0) & \text{I tre vettori }(2,1,0),(1,1,0),(1,0,-1)\text{ sono} & \\
f(1,1,0)=(3,1,0) & \text{linearmente indipendenti dato che il deter-} & \begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\\
f(1,0,-1)=(-1,0,1) & \text{minante della matrice a lato non è 0.} &
\end{array}$$

Quindi i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$, per cui esiste un'unica f lineare che soddisfa le condizioni:
Per scrivere la matrice associata occorre conoscere $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$.
Esprimiamo quindi i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori della base su cui è definita f. Le combinazioni sono in questo caso evidenti:

Si ha: $(1,0,0) = (2,1,0) - (1,1,0)$ quindi:
$f(1,1,0) = f(2,1,0) - f(1,1,0) = (4,2,0) - (3,1,0) = \underline{(1,1,0)}$
Si ha: $(0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0)$ quindi:
$f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(1,0,0) = (3,1,0) - (1,1,0) = \underline{(2,0,0)}$
Si ha: $(0,0,1) = (1,0,0) - (1,0,-1)$ quindi:
$f(0,0,1) = f(1,0,0) - f(1,0,-1) = (1,1,0) - (-1,0,1) = \underline{(2,1,-1)}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Ora si può scrivere la matrice A.

d. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-1-x} \end{pmatrix} = (-1-x)(x^2-x-2)$$

Le radici sono quindi: $\lambda = -1$ con molteplicità 2, $\lambda = 2$ con molteplicità 1

Per $\lambda = 2$, dato che $f(2,1,0) = (4,2,0)$ è evidente che $(2,1,0)$ è un autovettore relativo.

Per $\lambda = -1$, dato che $f(1,0,-1) = (-1,0,1)$ è evidente che $(1,0,-1)$ è autovettore relativo. Dato che però $\lambda = -1$ ha molteplicità 2, è possibile che ce ne siano altri, quindi risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - (-1)I$.
Il sistema si riduce immediatamente all'unica equazione $x + y + z = 0$ che ha ∞^2 soluzioni, tra cui una è, come già notato $(1,0,-1)$ e un'altra linearmente indipendente è per esempio $(1,-1,0)$.

Abbiamo quindi la base di autovettori $(2,1,0)$, $(1,0,-1)$, $(1,-1,0)$

443. a. L'applicazione è completamente definita perché i tre vettori $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,i)$ formano una base per $\mathbb{C}^3$.

b. Moltiplicando per $-i$, l'ultima relazione diventa immediatamente $f(0,0,1) = (-i,0,0)$, quindi si scrive subito la matrice associata. $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. Il polinomio caratteristico è $-x^3 - i$, quindi gli autovalori sono le radici terze di $-i$ che sono distinte. Avendo tre autovalori distinti, f è diagonalizzabile per il criterio fondamentale. Le radici sono i , $(\sqrt{3}-i)/2$, $(-\sqrt{3}-i)/2$. Questi sono gli autovalori. Determiniamo ad esempio un autovettore relativo all'autovalore i. Riduciamo la matrice $A - iI$:

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to iR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un autovettore è una soluzione del sistema ridotto, per esempio $(-1, i, 1)$.

444. Un'applicazione f che soddisfi i criteri dati è sempre diagonalizzabile dato che ha due autovalori distinti con molteplicità 1.
Sia v_1, v_3 una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da due autovettori relativi rispettivamente agli autovalori 1 e 3. Allora $(1,3)$ è loro combinazione lineare, anzi, moltiplicando i vettori della base per uno scalare possiamo supporre che sia loro somma:
$\underline{(1,3) = v_1 + v_3}$ con $v_1 \in V_1$ e $v_3 \in V_3$.
Quindi $f(1,3) = \underline{(2,0)}$, ma $f(1,3) = f(v_1) + f(v_3) = \underline{1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_3}$ da cui, mettendo insieme le relazioni sottolineate: $\begin{cases} v_1 + v_3 & = & (1,3) \\ v_1 + 3v_3 & = & (2,0) \end{cases}$ Si trova subito: $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ $v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

L'applicazione sarà perciò definita come: $\quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \qquad f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Per come è stata costruita, è anche chiaro che f è unica.

445. La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -1$. Avendo due autovalori di molteplicità 1 è diagonalizzabile.

Per $\lambda = i$ un autovettore è $(1, 0)$ Per $\lambda = -1$ un autovettore è $(4, -1)$

Quindi la diagonalizzazione di A è $P^{-1}AP = D$ con:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Inoltre $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P$

Si ha $A = PDP^{-1}$ da cui $A^{97} = PD^{97}P^{-1}$. Si ha immediatamente: $D^{97} = \begin{pmatrix} i^{97} & 0 \\ 0 & -1^{97} \end{pmatrix}$

Dato che $i^{97} = i^{96}i = i$ e $(-1)^{97} = -1$, allora $D^{97} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dato che $D^{97} = D$, anche $A^{97} = A$

451. Associamo nei tre casi la matrice a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a. Il polinomio caratteristico è $x^2 - 3x + 4$ e ha le radici 4 e -1.
Gli autovalori sono reali e hanno molteplicità 1, quindi A è diagonalizzabile sia come matrice reale che come matrice complessa. Cerchiamo una base di autovettori:

$\boxed{\lambda = 4}$ Il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ha le soluzioni (y, y). Un autovettore è $(1, 1)$.

$\boxed{\lambda = -1}$ Il sistema omogeneo associato alla matrice $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha le soluzioni $(3t, -2t)$. Un autovettore è $(3, -2)$.

Una base di autovettori è quindi per esempio $(1, 1), (3, -2)$.

Per P basta prendere la matrice delle coordinate degli autovettori trovati, per D la matrice diagonale degli autovalori nello stesso ordine. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si ha: $P^{-1}AP = D$, cioè $A = PDP^{-1}$ e anche $A^{99} = PD^{99}P^{-1}$.

La matrice P è già stata determinata. L'inversa di P si calcola immediatamente e si ha $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$. Inoltre $D^{99} = \begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto:

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^{99} + 3 & 3 \cdot 4^{99} - 3 \\ 2 \cdot 4^{99} - 2 & 3 \cdot 4^{99} + 2 \end{pmatrix}$$

b. Il polinomio caratteristico è $P(x) = x^2$
L'unico autovalore è quindi 0 con molteplicità 2. L'autospazio si ricava risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0I = A$. Dato che questo sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni, allora (V_0) ha dimensione 1 ed è diversa dalla molteplicità, quindi non esiste base di autovettori e A non è diagonalizzabile né come matrice reale, né come matrice complessa.

c. Il polinomio caratteristico è $x^2 - 2x + 2$ e ha le radici $\lambda = 1 \pm i$ entrambe con molteplicità 1, quindi A non è diagonalizzabile come matrice reale, ma lo è come matrice complessa, dato che ha due autovalori distinti.

$\boxed{\lambda = 1 + i}$ Il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - (1 + i)I$ ha tra le soluzioni $(i, 1)$. Questo è una autovettore.

$\boxed{\lambda = 1 - i}$ L'autovalore è il coniugato del precedente, un autovettore è il coniugato del precedente, $(-i, 1)$.

Una base di autovettori è quindi $(i, 1), (-i, 1)$.

Per scrivere la matrice P basta mettere in colonna le coordinate dei vettori mentre D è la matrice che ha nella diagonale gli autovalori nell'ordine corrispondente. $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{pmatrix}$

Per calcolare A^{99} scriviamo $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Dopo aver calcolato P^{-1} si scrive:

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + i)^{99} & 0 \\ 0 & (1 - i)^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $(1+i)^{99} = \left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^{99} = \sqrt{2}\, 2^{48} e^{3\pi i/4} = \sqrt{2}\, 2^{48} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{49}\,(-1+i)$

Analogamente (è il coniugato) $(1 - i)^{99} = 2^{49}\,(-1 - i)$. Pertanto:

$$A^{99} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} 2^{49} \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = 2^{48} \begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2^{48} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2^{49} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

452. a. La matrice associata è quella dei coefficienti delle tre forme lineari che definiscono f.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che il determinante di A è diverso da zero, quindi $\varrho(A) = 3$, per cui $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$ e $\dim(\ker(f) = 0$. Quindi $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ e l'unica sua base è vuota.

Inoltre $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^3$ e una sua base è per esempio la canonica.

b. $\det \begin{pmatrix} 5-x & 2 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 2 & 2 & -x \end{pmatrix} = (-1-x) \det \begin{pmatrix} 5-x & -3 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = (-1-x)(x^2 - 5x + 6)$

Gli autovalori sono quindi: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$ tutti con molteplicità 1. Quindi f è diagonalizzabile perché un'applicazione con tutti autovalori distinti lo è sempre.

Calcoliamo gli autovettori. Per ogni autovalore λ gli autovettori sono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$ che saranno senz'altro ∞^1 in ciascuno dei tre casi:

$\lambda = -1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 2$
$A + I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
Una soluzione è $(-2,3,-2)$	Una soluzione è $(3,0,2)$	Una soluzione è $(1,0,1)$

Il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ tutta fatta di autovettori: $(-2,3,-2)$, $(3,0,2)$, $(1,0,1)$

453. Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le tre condizioni perché i tre vettori $(1,1,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, dato che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante diverso da zero (è triangolare inferiore a blocchi).

a. Per scrivere la matrice associata occorre conoscere $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$. Esprimiamo quindi i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori della base su cui è definita f. Le combinazioni sono in questo caso evidenti:

Si ha: $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$ quindi:
- $f(1,0,0) = f(1,1,1) - f(0,1,1) = (0,1,0) - (0,2,2) = \underline{(0,-1,-2)}$
- $f(0,1,0) = \underline{(0,0,0)}$ (già noto)

Si ha: $(0,0,1) = (0,1,1) - (0,1,0)$ quindi:
- $f(0,0,1) = f(0,1,1) - f(0,1,0) = (0,2,2) - (0,0,0) = \underline{(0,2,2)}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da qui la matrice.

b. Calcoliamo gli autovalori: $\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ -1 & -x & 2 \\ -2 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)x^2$

Quindi 0 è autovalore di molteplicità 2, ma A ha caratteristica 2, dato che le due ultime righe sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(V_0) = \dim(\ker(f)) = 1$, pertanto f non è diagonalizzabile.

454. a. Perché $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, dato che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante diverso da zero (è triangolare superiore).

b. Per questo occorre conoscere la matrice associata A. Calcoliamo subito:
- $f(1,0,0) = \underline{(1,0,-1)}$ (dalla definizione)
- $f(0,1,0) = \overline{f(1,1,0)} - f(1,0,0) = (3,3,0) - (1,0,-1) = \underline{(2,3,1)}$
- $f(0,0,1) = f(1,1,1) - f(1,1,0) = (1,3,2) - (3,3,0) = \underline{(-2,0,2)}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Possiamo ora scrivere la matrice A e si ha: $f(x,y,z) = (x + 2y - 2z \,,\, 3y \,,\, -x + y + 2z)$.

c. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & -2 \\ 0 & \underline{3-x} & 0 \\ -1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (3-x)\det\begin{pmatrix} 1-x & -2 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} = (3-x)(x^2-3x)$$

Gli autovalori sono quindi: $\lambda = 0$ con molteplicità 1 ; $\lambda = 3$ con molteplicità 2

Un autovettore per $\lambda = 0$ si trova risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice che ha ∞^1 soluzioni e si trova $(2,0,1)$.

Per $\lambda = 3$ l'autovettore $(1,1,0)$ è evidente dalla definizione dell'applicazione, dato che $f(1,1,0) = (3,3,0)$, ma, avendo $\lambda = 3$ molteplicità 2, è possibile che ce ne siano altri, quindi risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$. Il sistema si riduce immediatamente all'unica equazione $-x+y-z=0$ che ha ∞^2 soluzioni, tra cui una è, come già notato $(1,1,0)$ e un'altra linearmente indipendente è per esempio $(1,0,-1)$.

Abbiamo quindi la base di autovettori $(2,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,-1)$

455. a. La matrice è formata coi coefficienti delle forme lineari che definiscono f.
Per trovare $\ker f$ risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice, riducendola:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - (1/3)R_1 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni sono ∞^1 e sono $(z,0,z)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$.

Il nucleo ha perciò dimensione 1 e una base per $\ker f$ è per esempio : $(1,0,1)$.

L'immagine è generata dai vettori che hanno per coordinate le colonne della matrice, quindi $(3,0,1),(2,2,2),(-3,0,-1)$. Dato che $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 2$, occorre scartarne uno. Scartiamo il terzo che è multiplo del primo.
Una base per $\operatorname{Im} f$ è quindi per esempio : $(3,0,1),(2,2,2)$.

b. Si ha: $\det\begin{pmatrix} 3-x & 2 & -3 \\ 0 & \underline{2-x} & 0 \\ 1 & 2 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)\det\begin{pmatrix} 3-x & -3 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)(x^2-2x)$.

Quindi gli autovalori sono: $\boxed{\lambda = 0}$ con molteplicità 1 ; $\boxed{\lambda = 2}$ con molteplicità 2.

- $\boxed{\lambda = 0}$ L'autovalore 0, avendo molteplicità 1 non crea problemi : $\dim(V_0) = 1$.
- $\boxed{\lambda = 2}$ La dimensione di V_2 è data dal numero di soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$, che ha evidentemente ∞^2 soluzioni, quindi $\dim(V_2) = 2$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

È ora chiaro che f è diagonalizzabile, dato che soddisfa il criterio di diagonalizzabilità.

c. Determiniamo una base per ciascun autospazio.

Com'è noto, se 0 è autovalore, allora $V_0 = \ker f$, una base per V_0 è quindi $(1,0,1)$.

Una base per V_2 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$ che si riduce alla sola equazione $x + 2y - 3z = 0$
Due soluzioni linearmente indipendenti sono: $(3,0,1)$, $(2,-1,0)$.
Mettendo insieme i tre vettori, il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ tutta fatta di autovettori: $\mathcal{B} : (1,0,1),(3,0,1),(2,-1,0)$.

d. Come P possiamo prendere la matrice delle coordinate dei tre vettori della base di autovettori. D è la matrice diagonale degli autovalori, nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

456. Per definire completamente f occorre conoscere le immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^3$. Sappiamo già dalle condizioni che $f(0,1,1) = (2,0,4)$ e $f(1,0,2) = (0,0,0)$, quindi occorre un terzo vettore v in modo che $(0,1,1)$, $(1,0,2)$, v sia base per $\mathbb{R}^3$, e per questo basta che i vettori siano linearmente indipendenti (dato che sono tre vettori). Scegliamo per esempio $v = (0,0,1)$. I tre vettori sono linearmente indipendenti perché la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante diverso da zero. Affinché -3 sia autovalore basta porre $f(0,0,1) = (0,0,-3)$. In questo modo l'applicazione è completamente definita dalle tre relazioni

$f(0,1,1) = (2,0,4) \qquad f(1,0,2) = (0,0,0) \qquad f(0,0,1) = -(0,0,-3),$

Per vedere se f è diagonalizzabile occorre innanzitutto scriverne la matrice associata e per questo basta calcolare:

$f(0,0,1) = (0,0,-3)$ è stato appena definito
$f(0,1,0) = f(0,1,1) - f(0,0,1) = (2,0,4) - (0,0,-3) = (2,0,7)$
$f(1,0,0) = f(1,0,2) - 2f(0,0,1) = (0,0,0) - (0,0,-6) = (0,0,6)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è imediato ed è $(-3-x)(x^2)$

Il secondo autovalore è $\lambda = 0$ con molteplicità 2. L'autospazio relativo è $\ker(f)$, ma, dato che la matrice ha caratteristica 2 (il minore 2×2 inquadrato è non nullo), allora $\dim(\ker(f)) = 3-2 = 1$, quindi f non è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

457. a. Basta risolvere il sistema omogeneo associato ad A:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -3x = 0 \\ 2x+y+2z-t = 0 \\ 2x+y+t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y+2z-t = 0 \\ y+t = 0 \end{cases} \quad E_2 \to E_2 - E_3 \begin{cases} x = 0 \\ 2z-2t = 0 \\ y+t = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi ∞^1 e sono $(0\,,\,-t\,,\,t\,,\,t)$.
I vettori del nucleo sono pertanto i multipli di $(0,-1,1,1)$ che ne costituisce una base.

b. Si ha: $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f)) = 3$
Un sistema di generatori per l'immagine si può ricavare dalle colonne di A ed è costituito dai seguenti quattro vettori:

$(2,-3,2,2)\,,\,(0,0,1,1)\,,\,(0,0,2,0)\,,\,(0,0,-1,1)$

Dato che $\mathrm{Im}\,(f)$ ha dimensione 3, occore scartarne uno, per esempio $(0,0,-1,1)$ (differenza tra il secondo e il terzo). Quindi una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ è $(2,-3,2,2)\,,\,(0,0,1,1)\,,\,(0,0,2,0)$, vettori che, come è possibile verificare, sono linearmente indipendenti.

c. Vediamo se esistono $a,b,c \in \mathbb{R}$ tali che $a(2,-3,2,2)+b(0,0,1,1)+c(0,0,2,0) = (1,0,0,0)$, cioè tali che abbia soluzioni il sistema lineare 4×3 associato alla matrice seguente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Evidentemente il sistema non ha soluzioni perché le prime due equazioni sono $2a = 1$ e $-3a = 0$.
Quindi $v_1 \notin \mathrm{Im}\,(f)$

Analogamente vediamo se ha soluzioni il sistema lineare associato alla matrice seguente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Eliminando le prima equazione proporzionale alla seconda si ottiene un sistema 3×3. La sua matrice dei coefficienti ha determinante diverso da 0 e il sistema ha una soluzione.
Quindi $v_4 \in \mathrm{Im}\,(f)$

d. I vettori dello spazio W sono $(0,0,a,b)$. Calcoliamo $f(0,0,a,b)$: Si ottiene $(0,0,2a-b,b)$. Quindi è autovettore se e solo se sono proporzionali cioè se $\dfrac{a}{2a-b} = \dfrac{b}{b}$, quindi $ab = 2ab - b^2$, cioè $a(a-b) = 0$. Gli autovettori sono per $a = 0 \quad (0,0,0,1)$ e per $a = b \quad (0,0,1,1)$.

e. $\det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -x & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-x & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x)(-x)(2-x)(1-x)$ Gli autovalori sono quindi:

$\lambda_1 = 2$ molteplicità: 2 $\quad 1 \le \dim(V_2) \le 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_2) = 1,2$
$\lambda_2 = 0$ molteplicità: 1 $\quad 1 \le \dim(V_0) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_0) = 1$
$\lambda_3 = 1$ molteplicità: 1 $\quad 1 \le \dim(V_1) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_1) = 1$

Il criterio di diagonalizzabilità è verificato per $\lambda_2 = 0$ e per $\lambda_3 = 1$. Per dimostrare che f è diagonalizzabile occorre verificare che $\dim(V_2) = 2$.

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ Riduciamo la matrice $A - 2I$ per calcolare le soluzioni del sistema omogeneo associato.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Eliminiamo R_1 e R_4 $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $R_2 \to R_2 + \frac{2}{3}R_1$ $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Le soluzioni sono ∞^2 e sono $(2t, -3t, z, t)$ che si scrivono anche come: $t(2, -3, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0)$, quindi i due vettori $(2, -3, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$ costituiscono una base per V_2 che ha dimensione 2.

Possiamo ora concludere che f è diagonalizzabile.

$\boxed{\lambda_2 = 0}$ Una base per V_0 è già stata trovata, dato che $V_0 = \ker(f)$. La base è $(0, -1, 1, 1)$.

$\boxed{\lambda_3 = 1}$ Occorrono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} R_2 \to R_2 + 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le soluzioni sono ora evidenti e sono $(0, 0, t, t)$. Una base per V_1 è quindi $(0, 0, 1, 1)$.
Una base di autovettori è pertanto: $(2, -3, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$

f. P e D si ricavano immediatamente e sono:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g. Il vettore $(0, 0, 0, 1)$ è differenza di autovettori, cioè $(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) - (0, 0, 1, 0)$, quindi:
$f^{2001}(0, 0, 0, 1) = f^{2001}(0, 0, 1, 1) - f^{2001}(0, 0, 1, 0)$
ma $f^{2001}(0, 0, 1, 1) = 1^{2001}(0, 0, 1, 1)$ $\quad f^{2001}(0, 0, 1, 0) = 2^{2001}(0, 0, 1, 0)$.
Quindi $f^{2001}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) - (0, 0, 2^{2001}, 0) = (0, 0, 1 - 2^{2001}, 1)$

458. La matrice A è diagonalizzabile perché è simmetrica. Per lavorare su A, associamo la matrice A a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico perché evidentemente A ha caratteristica 1, quindi $\det(A) = 0$ e 0 è autovalore. Inoltre V_0 è definito dall'equazione $x + 2y - z + t = 0$, quindi V_0 ha dimensione 3 (e pertanto 0 ha molteplicità 3). Una sua base è per esempio $(2, -1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1)$.
Per quanto riguarda l'altro autovettore, la matrice è simmetrica, ha tutte le righe proporzionali e le colonne identiche alle righe. Si vede quindi subito che ognuna delle righe o delle colonne (per esempio $(1, 2, -1, 1)$) è autovettore. Calcolando $f(1, 2, -1, 1)$ si ottiene $(7, 14, -7, 7)$, quindi l'autovalore è 7.
La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei vettori in colonna e la matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

459. a. Conviene associare A a un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$. Il polinomio caratteristico è $(x - i)^2(x + i)$ e ha le radici $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ con molteplicità rispettivamente 2 e 1.

- $\boxed{\lambda = i}$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - iI$ si trova $V_i = L\{(1, 1 - i, 0), (0, 1, 1)\}$.
- $\boxed{\lambda = -i}$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A + iI$ si trova: $V_{-i} = L\{(1, 1 + i, 0)\}$

Quindi f è diagonalizzabile, dato che, per matrici complesse, il criterio di diagonalizzabilità si riduce alla condizione che per ogni λ si abbia $\dim(V_\lambda) = \text{molteplicità}(\lambda)$

Una base di autovettori è quindi $(1, 1 - i, 0), (0, 1, 1), (1, 1 + i, 0)$.

La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei vettori in colonna e la matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 - i & 1 & 1 + i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

460. a. Si ha: $f(1, 0, 0) = \underline{(-1, k, 3)}$
Scriviamo: $(0, 1, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 2, -1) + c(0, 1, 1)$ da cui:

$\{0 = a \quad ; \quad 1 = 2b + c \quad ; \quad 0 = -b + c\}$ $\quad a = 0$; $b = 1/3$; $c = 1/3$ quindi:
$f(0,1,0) = (1/3)f(0,2,-1) + (1/3)f(0,1,1) = \underline{(0,1,3)}$.
Analogamente: $(0,0,1) = a(1,0,0) + b(0,2,-1) + c(0,1,1)$ da cui:
$\{0 = a \quad ; \quad 0 = 2b + c \quad ; \quad 1 = -b + c\}$ $\quad a = 0$; $b = -1/3$; $c = 2/3$ quindi:
$f(0,1,0) = (-1/3)f(0,2,-1) + (2/3)f(0,1,1) = \underline{(0,2,2)}$.
La matrice è pertanto quella a lato

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Il polinomio caratteristico è $(-1-x)(x^2 - 3x - 4)$.
Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 4$ con molteplicità 1 e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità 2.
Per sapere se è diagonalizzabile occorre controllare se $\dim(V_{-1}) = 2$. Esaminiamo la matrice $A + I$. Si vede subito che ha caratteristica 1 solo per $k = 2$, quindi solo per questo valore $\dim(V_{-1}) = 2$ e f è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

461. a. Si ha: $f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 \wedge \vec{w} + \vec{x}_2 \wedge \vec{w}$ $\qquad f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \wedge \vec{w}$
e coincidono per la distributività del prodotto vettore.
Analogamente $\quad af(\vec{x}) = a(\vec{x} \wedge \vec{w}) \quad f(a\vec{x}) = (a\vec{x}) \wedge \vec{w}$ $\quad$ quindi coincidono.
Come è noto $\vec{x} \wedge \vec{w} = \vec{0}$ se e solo se $\vec{x}$ è multiplo di $\vec{w}$, quindi $\ker(f) = L\{\vec{w}\}$.
Dato che il nucleo ha dimensione 1, l'immagine ha dimendsione 2, quindi per averne una base basta trovarne due vettori linearmente indipendenti. Per esempio $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \wedge \vec{w} = (0,3,2)$ e $f(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath} \wedge \vec{w} = (-3,0,-1)$.

b. Identifichiamo V_3 con $\mathbb{R}^3$ nel modo standard. Per calcolare la matrice associata occorrono $f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}), f(\vec{k})$. Abbiamo già calcolato $f(\vec{\imath})$ e $f(\vec{\jmath})$. Si ha poi $f(\vec{k}) = (-2,1,0)$.
Quindi si ricava la matrice associata che è antisimmetrica. Il polinomio caratteristico è $-x^3 - 12x$. Dato che c'è un solo autovalore reale e dato che V_3 è un $\mathbb{R}$-spazio, allora f non è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

462. Affinché esista un'unica f lineare occorre innanzitutto che $\quad (1,2,0,0), (0,0,1,1), (0,1,0,0), v$ sia una base per $\mathbb{R}^4$ e per questo basta che i vettori siano linearmente indipendenti (dato che sono quattro vettori). Scegliamo perciò un vettore v, che può essere scelto tra quelli della base canonica, in modo che i quattro vettori siano linearmente indipendenti. Per esempio $v = (0,0,0,1)$. I quattro vettori sono linearmente indipendenti perché , dato che la matrice delle coordinate dei quattro vettori ha determinante diverso da zero.
Affinché -2 sia autovalore basta porre $f(v) = -2v$. In questo modo l'applicazione è completamente definita.

Per vedere se f è diagonalizzabile occorre innanzitutto scriverne la matrice associata e per questo basta calcolare:
$f(0,1,0,0) = \underline{(1,2,0,0)}$ già noto
$f(0,0,0,1) = \overline{(0,0,0,-2)}$ è stato appena definito
$f(0,0,1,0) = \overline{f(0,0,1,1)} - f(0,0,0,1) = (1,0,0,0) - (0,0,0-2) = \underline{(1,0,0,2)}$
$f(1,0,0,0) = f(1,2,0,0) - 2f(0,1,0,0) = (3,6,0,0) - (2,4,0,0) = \overline{\underline{(1,2,0,0)}}$

Quindi si ha la matrice associata. Calcoliamone il polinomio caratteristico usando il fatto che è una matrice triangolare superiore a blocchi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 2 & -2-x \end{pmatrix} = (x^2 - 3x)(x^2 + 2x)$$

I primi due autovalori sono quindi $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ entrambi con molteplicità 1.
Il terzo autovalore è $\lambda_3 = 0$ con molteplicità 2. L'autospazio relativo è $\ker(f)$, ma, dato che la matrice ha caratteristica 3 (il minore 3×3 inquadrato è non nullo), allora $\dim(\ker(f)) = 4 - 3 = 1$, quindi f non è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

463. Per lavorare sulle matrici, le associamo a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

a. Evidentemente A ha caratteristica 1, quindi $\det(A) = 0$ e $\lambda_1 = 0$ è autovalore. L'autospazio relativo è definito dall'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, quindi V_0 ha dimensione $n - 1$ (e pertanto 0 ha molteplicità almeno $n - 1$). Una sua base è per esempio

$(1,-1,0,\dots,0),(0,1,-1,\dots,0),\dots,(0,\dots 0,1,-1,0),(0,\dots,0,1,-1)$.
È anche chiaro che $(1,1,1,\dots,1)$ è autovettore dato che $f(1,1,1,\dots,1)=(n,n,n,\dots,n)$ e che quindi n è l'altro autovalore e ha molteplicità 1. In conclusione:
Il polinomio caratteristico è $\pm(\lambda-n)\lambda^{n-1}$ (col segno $\pm$ a seconda che n sia pari o dispari) e una base di autovettori è per esempio
$(1,-1,0,\dots,0),(0,1,-1,\dots,0),\dots,(0,\dots 0,1,-1,0),(0,\dots,0,1,-1),(1,1,1,\dots,1)$.

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

b. Dato che $B+I=A$ ha caratteristica 1 , allora $\lambda_1=-1$ è autovalore e come sopra ha molteplicità $n-1$. Analogamente $(1,1,1,\dots,1)$ è autovettore, ma stavolta l'autovalore è $\lambda_2=n-1$ con molteplicità 1.
L'autospazio relativo a $\lambda_1=-1$ è definito, come in A, dall'equazione $x_1+x_2+\dots+x_n=0$ e ha quindi dimensione $n-1$. Una sua base è la stessa trovata per V_0 in A.
Analogamente $(1,1,1,\dots,1)$ è autovettore relativo a $\lambda_2=n-1$.
Una base di autovettori è per esempio la stessa determinata per A.
P è la stessa trovata per A, D è invece quella a lato.

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

464. Assoceremo ogni volta A e B a un'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tramite la base canonica.

A. Il polinomio caratteristico è $(x-1)(x^2-b^2)$. Gli autovalori sono $1,b,-b$. A seconda della possibilità che coincidano, si possono considerare quattro casi diversi:

a. $\boxed{b\neq 0,1,-1}$ I tre autovalori sono distinti quindi A è diagonalizzabile.

b. $\boxed{b=0}$ L'autovalore $\lambda=0$ ha molteplicità 2. Ma $\varrho(A-0I)=1$ *per ogni* a. e quindi $\dim(V_0)=3-\varrho(A-0)=2$. In conclusione, se $b=0$, A è diagonalizzabile per ogni a.

c. $\boxed{b=1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 2. Come si verifica subito, la caratteristica di $A-1I$ è 1 se $a=-1$ ed è 2 se $a\neq-1$. Quindi A è diagonalizzabile se $a=-1$ e non se $a\neq-1$.

d. $\boxed{b=-1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 2. Come si verifica subito, la caratteristica di $A+1I$ è 2 se $a=1$ ed è 2 se $a\neq 1$. Quindi A è diagonalizzabile se $a=1$ e non se $a\neq 1$.

B. Il polinomio caratteristico è $(x-1)(x-a)(x-b)$. Gli autovalori sono $1,a,b$. A seconda della possibilità che coincidano, si possono considerare cinque casi diversi (che, come vedremo, diventano poi sette):

a. $\boxed{a\neq 1,\ b\neq 1 \text{ e } a\neq b}$ I tre autovalori sono distinti e quindi B è diagonalizzabile.

b. $\boxed{a=1 \text{ e } b\neq 1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 2. Come si calcola subito, $V_1=L\{(0,1,0)\}$ e ha dimensione 1 per cui B non è diagonalizzabile, per ogni $b\neq 1$.

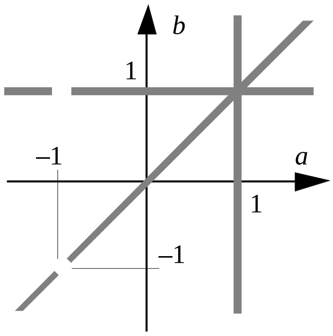
c. $\boxed{a=1 \text{ e } b=1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 3. Come sopra, però $V_1=L\{(0,1,0)\}$ e ha dimensione 1 per cui B non è diagonalizzabile.

d. $\boxed{b=1 \text{ e } a\neq 1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 2. Come si calcola subito, V_1 è definito dal sistema lineare $\{x+(a-1)y=0\ ;\ (a+1)z=0\}$. Occorre quindi distinguere altri due casi:

d1. $\boxed{a=-1 \text{ e } b=1}$ Lo spazio V_1 ha dimensione 2, quindi B è diagonalizzabile.

d2. $\boxed{a\neq 1,-1 \text{ e } b=1}$ Lo spazio V_1 ha dimensione 1, quindi B non è diagonalizzabile.

e. $\boxed{a = b}$ e $\boxed{a, b \neq 1}$ (caso già considerato al punto c.). Allora V_a è definito dal sistema $\{x = 0\ ;\ (a+1)\,z = 0\}$. Distinguiamo quindi altri due casi:



e1. $\boxed{a = -1 \text{ e } b = -1}$ Allora V_{-1} ha dimensione 2, quindi B è diagonalizzabile.

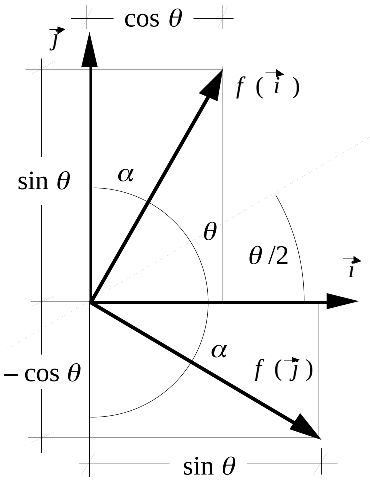
e2. $\boxed{a \neq -1 \text{ e } b = a}$ (ma sempre $\boxed{a \neq 1}$). Allora V_a ha dimensione 1, quindi B non è diagonalizzabile.

- La situazione può essere riassunta nello schema disegnato, nel quale le zone in grigio corrispondono alle coppie (a, b) per cui B non è diagonalizzabile.

465. a. Il polinomio caratteristico è $x^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = x^2 - 1$ e non dipende da θ. Dato che A ha due autovalori distinti, allora è sempre diagonalizzazbile.

b. Si ha:
$A-1I = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è $(\sin\theta\ ,\ 1-\cos\theta)$. Questo vettore genera V_1. Un'altro generatore (proporzionale al primo, anche se non in modo evidente) è $(1+\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$.
$A+1I = \begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è $(\sin\theta\ ,\ -1-\cos\theta)$. Questo vettore genera V_{-1}. Un'altro generatore (proporzionale al primo, anche se non in modo evidente) è $(\cos\theta - 1\ ,\ \sin\theta)$.
Gli autovettori sono quelli dei due autospazi (escluso naturalmente il vettore nullo).

c. Come si vede dal disegno, il vettore $f(\vec\imath)$ forma angolo $\alpha = \pi/2 - \theta$ con $\vec\jmath$ e ugualmente il vettore $f(\vec\jmath)$ forma angolo $\alpha = \pi/2 - \theta$ con $\vec\imath$, quindi $\vec\imath$, $\vec\jmath$ sono stati riflessi attorno alla bisettrice dei vettori $\vec\imath$ e $f(\vec\imath)$, cioè del vettore che forma un angolo di $\theta/2$ con $\vec\imath$. Di conseguenza gli autovettori relativi a $\lambda = 1$ sono i vettori direzionali della retta r attorno a cui la f riflette. Un vettore direzionale per la bisettrice r si può trovare sommando $\vec\imath$ con $f(\vec\imath)$ (dato che hanno lo stesso modulo e cioè 1) ed è perciò $(1, 0) + (\cos\theta\ ,\ \sin\theta) = (1+\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$, che è, come abbiamo visto, autovettore per $\lambda = 1$. Gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ sono quelli ortogonali alla retta r, visto che in riflessione sono trasformati nel loro opposto. In effetti, come si verifica subito, gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ sono ortogonali agli autovettori relativi a $\lambda = 1$.



466. Identifichiamo M_{22} con $\mathbb{R}^4$ mediante l'appiattimento per righe e scriviamo la matrice associata a f, quindi calcoliamo $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si scrive così subito la matrice A associata a f tramite la base canonica. Il polinomio caratteristico è $x^2(x+1)(x-1)$.
Per trovare gli autospazi basta risolvere i sistemi omogenei associati alle matrici $A - I$, $A + I$, A e interpretare i risultati come elementi di una matrice 4×4 . Gli autospazi sono:

$$V_0 = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \quad V_1 = L\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad V_{-1} = L\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Le quattro matrici formano quindi una base di autovettori.

Avvertenza sull'uso dei simboli $\pm$ e $\mp$: Faremo largo uso di questi simboli, ma avvertiamo che il loro uso è comodo, ma piuttosto delicato. Il loro significato varia a seconda del contesto.

- Espressioni del tipo "Le rette sono $y = \pm 2x$ " e "per $k = \pm 1$" significano rispettivamente "Le rette sono $y = 2x$ e $y = -2x$" e "Per $k = 1$ o $k = -1$".
- Espressioni del tipo "tranne i punti $(\pm 1, 0)$ " e "per $k \neq \pm 1$" significano rispettivamente "tranne i punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$" e "Per $k \neq 1$ e $k \neq -1$".
- Quando compaiono diversi simboli $\pm$ in uno stesso ambito si intende (salvo diverso avviso) che siano correlati, cioè che quando uno assume il valore $+$, lo assumano anche gli altri.
- Esempio: "I punti $(\pm 2, \pm\sqrt{5})$" significa "I punti $(2, \sqrt{5})$ e $(-2, -\sqrt{5})$.
- Il simbolo $\mp$ si usa sempre solo in correlazione con dei $\pm$ o con altri $\mp$ e si intende che assuma il valore $-$ quando i $\pm$ assumono il valore $+$ e viceversa.
- Esempio: "Le rette $y = (\pm 2 \mp \sqrt{3})$" significa "Le rette $y = (2 - \sqrt{3})$ e $y = (-2 + \sqrt{3})$ ".
- Esempio: "Per $t = \pm 3$ si ottengono i punti $(\pm 2, \mp\sqrt{3})$" significa "Per $t = 3$ si ottiene il punto $(2, -\sqrt{3})$ e per $t = -3$ si ottiene il punto $(-2, \sqrt{3})$".
- Bisogna soprattutto prestare attenzione a manipolare equazioni o espressioni contenenti diversi simboli $\pm$ o $\mp$.
- Esempio: $-(1 \pm \sqrt{2}) \pm 3x$ diventa $-1 \mp \sqrt{2} \pm 3x$ e l'equazione $(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})y + (\sqrt{5} \mp \sqrt{2}) = 0$ diventa $y = \dfrac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{2}}{\sqrt{2} \pm \sqrt{3}}$

Geometria lineare nel piano

501. a. Vettori direzionali sono $(B - A) = (3, -2)$ e tutti i suoi multipli.
Una rappresentazione parametrica è per esempio $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. Un altra è $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$
b. Per esempio $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 2t \end{cases}$
c. Un suo punto è $(4, 0)$, un altro è $(1, -1)$. Un vettore direzionale è per esempio $(3, 1)$ (ortogonale al vettore normale della retta che è $\vec{n} = (1, -3)$).
Una rappresentazione parametrica è $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = t \end{cases}$. Un altra è $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$

502. Ponendo $x = 0$ si trova $t = -1/2$, quindi la sua intersezione con $x = 0$ è $(0, -5/2)$. Analogamente la sua intersezione con $y = 0$ è $(5, 0)$. Basta quindi scrivere la retta passante per $(0, -5/2)$ e con vettore direzionale $(5, 0) - (0, -5/2) = (5, 5/2)$ $\begin{cases} x = 0 + 5t \\ y = -5/2 + 5/2t \end{cases}$
Per $t = 1/2$ si ha ora il punto della divisione di $\overline{AB}$ in due parti cioè $M(5/2, -5/4)$.
Per $t = 1/3$ e $t = 2/3$ si hanno i punti della divisione di $\overline{AB}$ in tre parti cioè $M_1(5/3, -5/3)$ e $M_2(10/3, -5/6)$.

503. Le rette r_1 e r_2 coincidono perché hanno gli stessi vettori direzionali e il punto $(1, -1)$ di r_1 sta su r_2 (per $t = -1$).
Le rette s_1 e s_2 non coincidono, pur avendo gli stessi vettori direzionali, perché il punto $(-2, 2)$ di s_1 non sta su s_2.

504. Basta scrivere le rette nella forma $y = mx + n$, cosa possibile per tutte tranne per la c. , che ha quindi coefficiente angolare infinito. Quindi

a. $y = 2x - 4$	$m = 2$	b. $y = 0 \cdot x - 4$	$m = 0$	c. $x = 10$	$m = \infty$
d. $y = \frac{1}{3}x$	$m = \frac{1}{3}$	e. $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 7$	$m = \frac{1}{5}$	f. $y = \frac{1}{3}x - 1$	$m = \frac{1}{3}$

505. Il sistema lineare 3×2 delle equazioni delle tre rette è associato alla matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -7 \end{array}\right)$ e, riducendolo con l'algoritmo di Gauss si vede che ha l'unica soluzione $(-1,1)$, quindi le tre rette appartengono a un fascio e il centro è $(-1,1)$.

506. Il sistema lineare 3×2 delle equazioni delle tre rette è associato alla matrice. La matrice 3×3 ha determinante $2+2k-4k^2$ ed è quindi zero per $k=-1/2$ e $k=1$.
$\left(\begin{array}{cc|c} 2k & -k & 1 \\ 2 & -k & 0 \\ -2k & 1 & 1 \end{array}\right)$
Per $k\neq -1/2\,,\,1$ il sistema non ha soluzioni (dato che la caratteristica della matrice completa è 3), quindi le rette non si intersecano in un punto e non sono tutte parallele, perché le due colonne dei coefficienti sono proporzionali solo per $k=1$, quindi non costituiscono un fascio.
Per $k=-1/2$ il sistema ha una soluzione $(-1/3\ ,\ 4/3)$, quindi le rette costituiscono un fascio proprio con questo centro.
Per $k=1$ sono tutte parallele con vettore normale $\vec{n}=(2,-1)$ e costituiscono quindi un fascio improprio di rette parallele.

507. a. Il vettore normale è $(1,3k)$, quindi un vettore direzionale è $(3k,-1)$. Occorre che $(3k,-1)$ e $(2,1)$ siano proporzionali, cioè che $\dfrac{3k}{2}=\dfrac{-1}{1}$, quindi che si abbia $k=-2/3$.
b. Evidentemente per $k=0$ si ha una retta parallela all'asse y, mentre per nessun k si ha una retta parallela all'asse x.
La famiglia è un fascio perché si scrive $(x+2)+k(3y-5)$, ma incompleto, dato che dipende da un parametro anziché da due proporzionali e infatti manca la retta parallela all'asse x).
c. Visto che la famiglia è un fascio (benché incompleto), basta intersecarne due rette distinte, per esempio $x+2=0$ (per $k=0$) e $x+3y-3=0$ (per $k=1$) e si trova subito $C(-2,5/3)$.
d. Le rette intersecano gli assi nei punti $\left(0\,,\dfrac{5k-2}{3k}\right)$ e $(5k-2,0)$. Il triangolo è rettangolo e i due cateti misurano rispettivamente $\left|\dfrac{5k-2}{3k}\right|$ e $|\ 5k-2\ |$ per cui l'area del triangolo è $\left|\dfrac{5k-2}{3k}\right|\cdot\dfrac{|\ 5k-2\ |}{2}$. Ponendola uguale a 7 si ricava $25k^2-10k+4=|\ 42k\ |$. Le due equazioni di secondo grado sono:
$25k^2-20k+4=42k$ per $k>0$ che ha le soluzioni $k=\dfrac{31\pm\sqrt{861}}{25}$
(entrambe accettabili perché entrambe positive).
$25k^2-20k+4=-42k$ per $k<0$ che ha le soluzioni $k=\dfrac{-11\pm\sqrt{21}}{25}$
(entrambe accettabili perché entrambe negative).

508. Parametrizziamo la retta: $\{x=t-2\quad;\quad y=t\}$. I punti di r sono quindi $(t-2,t)$
Il triangolo sarà POA sarà rettangolo in P se i vettori $(P-O)$ e $(P-A)$ sono ortogonali:
$(P-O)=(t-2,t)\qquad (P-A)=(t-12,t)$
$(P-O)\cdot(P-A)=(t-2,t)\cdot(t-12,t)=(t-2)(t-12)+t^2=0$
Si ha l'equazione $2t^2-14t+24=0$ che ha le due soluzioni $t_1=4$ e $t_2=3$.
I punti cercati si ottengono per questi due valori di t e sono $P_1(2,4)\qquad P_2(1,3)$

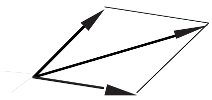
509. La retta passa per $M(1/2\ ,\ 1)$ (punto medio del segmento AB) e ha come vettore normale il vettore $(B-A)=(1,-6)$ e quindi è $1(x-1/2)-6(y-1)=0$ o anche, semplificando: $2x-12y+11=0$.

510. a. La retta passante per $P=(1,1)$ e ortogonale a $r: x-2y=1$ è $n: 2x+y=3$. Intersecando le rette r e n si trova il punto $M=(7/5\ ,\ 1/5)$.
Il punto simmetrico è perciò $P_1=2M-P=(9/5,-3/5)$.
b. Oseerviamo che $(1,1)$ sta sulla retta $s:\ x+y=2$, quindi la retta simmetrica passa per il punto $P_1(9/5,-3/5)$ trovato sopra. Inoltre passa per il punto intersezione delle due rette r e s che è $I(5/3,1/3)$. La retta è quindi $s_1:\ 21x+3y=36$.

511. L'equazione è $(x-y)(x-3y)(x-1)=0$, che è soddisfatta se e solo se $x=y$ oppure $x-3y=0$ oppure $x-1=0$.

512. Le rette sono quelle del fascio $ax + b(y-1) = 0$ il cui vettore normale forma angolo di $\pi/6$ con il vettore normale di $y = 2x$ che è $(2,-1)$. Si deve quindi avere:
$\dfrac{|\,(a,b)\cdot(2,-1)\,|}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ da cui $2\mid 2a-b\mid = \sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+b^2}$ ed elevando a quadrato (è tutto positivo): $a^2 - 16ab - 11b^2 = 0$ o anche $(a/b)^2 - 16(a/b) - 11 = 0$ (posso dividere per b perché evidentemente non c'è alcuna soluzione accettabile con $b = 0$), da cui $a/b = 8 \pm 5\sqrt{3}$, per esempio $a = 8 \pm 5\sqrt{3}$ e $b = 1$ (tutte le altre soluzioni danno le stesse due rette con equazioni proporzionali). Le rette sono pertanto: $(8 \pm 5\sqrt{3})x + y = 1$.

513. Le bisettrici sono notoriamente $\dfrac{2x-y}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}}$. Per stabilire quale delle bisettrici sia situata nell'angolo minore conviene però procedere in altro modo.
Un vettore direzionale per la prima retta è $\vec{v}(1,2)$, uno per la seconda è $\vec{w}(-1,1)$. Il loro prodotto scalare è positivo, quindi formano un angolo acuto. Per avere il vettore bisettore nell'angolo acuto li normalizziamo. Dato che ora hanno lo stesso modulo, la loro somma è proprio il vettore bisettore.
$\dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\,,\,\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right).$



Quindi come vettore direzionale per la retta bisettrice nell'angolo minore possiamo prendere $(\sqrt{2}-\sqrt{5}\,,\,2\sqrt{2}+\sqrt{5})$. Inoltre la retta passa per il punto intersezione delle due rette che è $(1/3, 2/3)$.
Per avere l'altra bisettrice cambiamo verso a uno dei vettori direzionali delle due rette in modo che formino un angolo ottuso: usando $(1,2)$ e $(1,-1)$ il prodotto scalare è negativo, quindi l'angolo è ottuso. Ripetendo la procedura otteniamo la retta bisettrice nell'angolo maggiore, che ha vettore direzionale $(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,,\,2\sqrt{2}-\sqrt{5})$ e passa sempre per $(1/3, 2/3)$.
Le due rette sono $\begin{cases} x = 1/3 + (\sqrt{2} \mp \sqrt{5})t \\ y = 2/3 + (2\sqrt{2} \pm \sqrt{5})t \end{cases}$ Con la scelta " $-$ $+$ " si ottiene la bisettrice dell'angolo minore, con la scelta " $+$ $-$ " si ottiene la bisettrice dell'angolo maggiore.

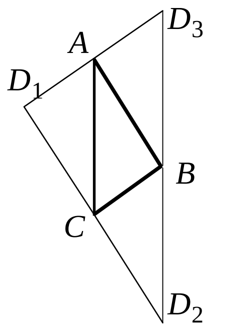
514. Parametrizziamo la retta $4x - 3y + 2$: $\{x = 3t+1\ ;\ y = 4t+2\}$. Il simmetrico di $(3t+1, 4t+2)$ rispetto alla retta $x - 2y = 2$ è (x_0, y_0) tale che:
- $\left(\dfrac{3t+1+x_0}{2}\,,\,\dfrac{4t+2+y_0}{2}\right)$ è su $x - 2y = 2$ cioè $\dfrac{3t+1+x_0}{2} - 2\dfrac{4t+2+y_0}{2} = 2$.
- $(3t+1+x_0, 4t+2+y_0)$ è ortogonale a $x - 2y = 2$ cioè $(3t+1+x_0, 4t+2+y_0)\cdot(2,1) = 0$.

Dalle due relazioni si deduce $\{x_0 = 5t+3\ ,\ y_0 = -2\}$. Avendo tutti punti la stessa ordinata, la distanza minima da $(0,0)$ si ottiene per $t = -3/5$. Il punto cercato è: $P(-4/5, -2/5)$.

515. Si trova subito che $P = (4,-1)$. Cerchiamo tra i punti della retta $s : \{x = 2 - t\ ;\ y = 3 + 2t\}$ quello che dista 5 da $P(4,-1)$:
$\mathrm{dist}\Big((2-t, 3+2t)\ ,\ (4,-1)\Big) = 5$ ha come soluzioni $t = -2 \pm \sqrt{5}$ e si trovano i punti di s : $(4 \mp \sqrt{5}\ ,\ -1 \pm 2\sqrt{5})$. Dobbiamo ora trovare i punti di r le cui proiezioni su s sono appunto questi due punti. Scriviamo quindi le rette ortogonali a s e passanti per questi due punti:
$\begin{cases} x &= 4 \mp \sqrt{5} + 2t \\ y &= -1 \pm 2\sqrt{5} + t \end{cases}$ Intersecandole con r si ottiene $t = \mp 3\sqrt{5}/4$, da cui i punti cercati

$$P_1\begin{cases} x &= 4 \mp \sqrt{5} + 2(\mp 3\sqrt{5}/4) \\ y &= -1 \pm 2\sqrt{5} + (\mp 3\sqrt{5}/4) \end{cases} \qquad P_2\begin{cases} x &= 4 \mp 5\sqrt{5}/2 \\ y &= -1 \pm 5\sqrt{5}/4 \end{cases}$$

516. Ci sono tre modi:



Se il parallelogramma è $ABCD_1$, possiamo trovare D_1 sommando i due vettori $(A-B)$ e $(C-B)$. Si ottiene $(D_1 - B) = (4,-4)$, da cui $D_1 = (5,-2)$.

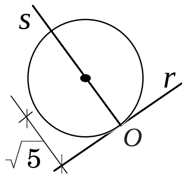
Se il parallelogramma è $CABD_2$, possiamo trovare D_2 sommando i due vettori $(B-A)$ e $(C-A)$. Si ottiene $(D_2 - A) = (7,2)$, da cui $D_2 = (7,2)$.

Se il parallelogramma è $ACBD_3$, possiamo trovare D_3 sommando i due vettori $(A-C)$ e $(B-C)$. Si ottiene $(D_3 - C) = (-11,2)$, da cui $D_3 = (-5,2)$.

517. Le tre mediane appartengono, come è noto, a un fascio il cui centro è il baricentro. Una delle mediane è la retta passante per $A(a_1, a_2)$ e per il punto medio del lato opposto che è $M\left((b_1 + c_1)/2\,,\ (b_2 + c_2)/2\right)$.
Scriviamo la retta parametricamente in modo da ottenere A per $t = 0$ e M per $t = 1$. Allora, per un'altra nota proprietà del baricentro, esso è situato a $2/3$ della mediana, per cui lo si ottiene per $t = 2/3$. Eseguiti i conti, il baricentro è $\left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

Circonferenze nel piano

521. La retta passante per $(0, 0)$ e ortogonale a quella data è $s : \{x = 2t \quad ; \quad y = -3t\}$.
I centri delle circonferenze devono appartenere alla retta s e sono quindi i punti del tipo $(2t\ ,\ -3t)$ che hanno distanza $\sqrt{5}$ da $(0, 0)$. Si scrive $\sqrt{(2t - 0)^2 + (3t - 0)^2} = \sqrt{5}$, da cui $\sqrt{13t^2} = \sqrt{5}$ e quindi $t = \pm\sqrt{5/13}$.
I centri sono perciò $(\pm 2\sqrt{5/13}\ ,\ \mp 3\sqrt{5/13})$ e le circonferenze sono: $\left(x \mp \sqrt{20/13}\right)^2 + \left(y \pm \sqrt{45/13}\right)^2 = 5$.



522. I centri sono i punti dell'asse x cioè del tipo $(t, 0)$ che hanno distanza 1 da $2x - y = 0$. Risolviamo $\dfrac{|\ 2(t) - (0)\ |}{\sqrt{5}} = 1$: Si trova $t = \pm\sqrt{5}/2$. Le circonferenze sono quindi: $(x \pm \sqrt{5}/2)^2 + y^2 = 1$.

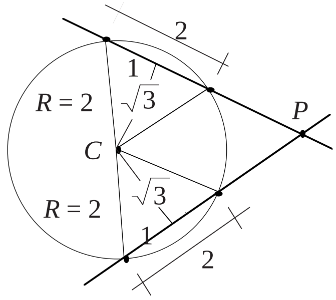
523. I centri delle circonferenze cercate appartengono all'asse del segmento $\overline{AB}$. L'asse è la retta passante per $M = (A + B)/2 = (0, 1)$ e ortogonale a $(B - A) = (4, -2)$.
Un vettore ortogonale a $(B - A)$ è $(1, 2)$, quindi l'asse è $\{x = t \quad ; \quad y = 2t + 1\}$.
I centri sono punti dell'asse che hanno uguale distanza da r e da $B(2, 0)$, cioè tali che $\dfrac{|\ (t) + (2t + 1) + 2\ |}{\sqrt{2}} = \sqrt{(t - 2)^2 + (2t + 1 - 0)^2}$. Si ricava $t = 9 \pm 4\sqrt{5}$.
Sostituendo nella retta si hanno i centri, sostituendo in una delle due distanze si ha il raggio.
In conclusione le circonferenze sono:
$$(x - 9 \mp 4\sqrt{5})^2 + (y - 19 \mp 8\sqrt{5})^2 = 90(9 \pm 4\sqrt{5})$$

524. Completiamo i quadrati per determinare centro e raggio della circonferenza:
$(x^2 + 2x + \underline{1}) + (y^2 + 8y + \underline{16}) = \underline{1} + \underline{16} \qquad (x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 17$
La circonferenza ha quindi centro $(-1, -4)$ e raggio $\sqrt{17}$.
Le rette passanti per $(1, 2)$ sono $a(x - 1) + b(y - 2) = 0$ (a, b non entrambi nulli). Calcoliamo la loro distanza dal centro e imponiamo che sia $\sqrt{17}$.
Si ha: $\dfrac{|\ a(-1 - 1) + b(-4 - 2)\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{17}$ ovvero $13a^2 - 24ab - 19b^2 = 0$.
Possiamo supporre $b \neq 0$ perché evidentemente non c'è alcuna soluzione con $b = 0$ (a parte $a = b = 0$ che non dà una retta). Dividendo per b^2, l'equazione omogenea di secondo grado diventa $13\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 24\left(\dfrac{a}{b}\right) - 19 = 0$ e ha le soluzioni $\dfrac{a}{b} = \dfrac{12 \pm \sqrt{391}}{13}$.
Per esempio $a = 12 \pm \sqrt{391}$ e $b = 13$. Le rette sono quindi: $(12 \pm \sqrt{391})(x - 1) + 13(y - 2) = 0$.
Tutte le altre soluzioni dell'equazione omogenea di secondo grado sono proporzionali e quindi forniscono le stesse rette

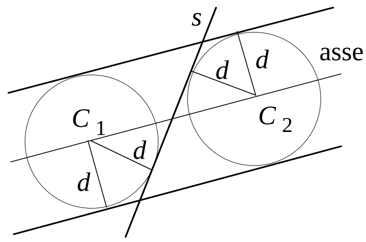
525. Il centro della circonferenza è sulla retta passante per $B(1, 0)$ e ortogonale a t. Questa retta ha vettore direzionale $(1, 1)$, quindi una sua rappresentazione parametrica è: $\begin{cases} x &= & t + 1 \\ y &= & t \end{cases}$
Il centro è perciò tra i punti del tipo $C(t + 1, t)$ quello avente la stessa distanza da A e da B:
$\mathrm{dist}(A, C) = \sqrt{(t + 1 - 0)^2 + (t - 2)^2} = \sqrt{t^2 + 2t + 1 + t^2 - 4t + 4} = \sqrt{2t^2 - 2t + 5}$
$\mathrm{dist}(B, C) = \sqrt{(t + 1 - 1)^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2t^2}$
Perciò: $\quad \sqrt{2t^2 - 2t + 5} = \sqrt{2t^2}$ da cui $2t^2 - 2t + 5 = 2t^2$ e $t = 5/2$
Il centro è quindi $C\left(\dfrac{7}{2}\,,\ \dfrac{5}{2}\right)$. Il raggio è la distanza tra A e C cioè $\sqrt{2t^2} = \sqrt{25/2} \simeq 3.53$.

L'equazione della circonferenza è $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

526. La circonferenza ha centro $C=(2,0)$ e raggio $R=2$.
Le rette sono quelle del fascio di centro $P(4,-1)$ e cioè del tipo $a(x-4)+b(y+1)=0$ la cui distanza dal centro è $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. La distanza dal centro è $\frac{|\,a(2-4)+b(0+1)\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, quindi si ha: $\frac{|-2a+b\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3}$, da cui $a^2-4ab-2b^2=0$. Risolvendo rispetto ad a si trova $a=(2\pm\sqrt{6})b$. Per esempio $a=2\pm\sqrt{6}$ e $b=1$.
Le rette sono: $(2\pm\sqrt{6})(x-4)+(y+1)=0$.

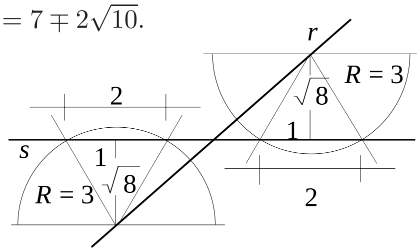


527. Intersechiamo le due rette parallele con una retta qualunque, per esempio l'asse x e otteniamo $(1,0)$ e $(3,0)$. L'asse della striscia è la retta passante per il punto medio di questi due punti e parallela alle due date, cioè la retta $y=2x+2$ o anche $\{x=t\,;\;y=2t+2\}$.
I centri sono i punti $(t,2t{+}2)$ la cui distanza d da $y=2x{+}1$ è uguale a quella da s. Cioè: $\frac{|\,2x-y+1\,|}{\sqrt{5}}=\frac{|\,3x-y\,|}{\sqrt{10}}$ ovvero: $\frac{|\,2t-(2t+2)+1\,|}{\sqrt{5}}=\frac{|\,3t-(2t+2)\,|}{\sqrt{10}}$. Si trova $t=2\pm\sqrt{2}$, da cui i centri. Il raggio è per entrambe la metà della distanza di un punto della prima retta (per esempio $(1,0)$) dalla seconda. Si trova $R=1/\sqrt{5}$.
Le circonferenze sono: $(x-2\pm\sqrt{2})^2+(y-6\pm2\sqrt{2})^2=1/5$.



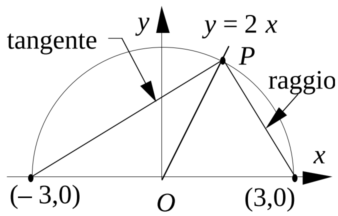
528. I centri delle circonferenze cercate appartengono alle due bisettrici delle rette. Le bisettrici sono: $\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{2x-y-4}{\sqrt{5}}$. Dato che i centri appartengono all'asse y, essi sono le intersezioni tra l'asse y e le bisettrici, cioè $(0,1\mp\sqrt{10})$.
I raggi sono le distanze dei centri da una delle rette per esempio da $x+y+1=0$ e sono rispettivamente $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (per il "+") e $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ (per il "−")
Le circonferenze sono quindi: $x^2+(y-1\pm\sqrt{10})^2=7\mp2\sqrt{10}$.

529. La circonferenza ha come centro un punto della retta $r:\{x=t\quad;\quad y=3t+2\}$ che abbia distanza $\sqrt{8}=\sqrt{3^2-1}$ dalla retta s. Ce ne sono quindi due e sono $(1,5)$ e $(-1,-1)$.
Le circonferenze sono:
$(x-1)^2+(y-5)^2=9\qquad(x+1)^2+(y+1)^2=9$



530. Una delle intersezioni, dovendo essere punto della retta $y=2x$ è del tipo $P(t,2t)$. Il raggio della circonferenza che passa per P e ha centro $C(3,0)$ ha come vettore direzionale $(P-C)$ cioè $(t-3,2t)$. Questo è anche un vettore normale della retta tangente che ha perciò equazione $(t-3)(x-t)+2t(y-2t)=0$. Imponendo che la tangente passi per il punto $(-3,0)$ si ottiene $5t^2-9=0$, cioè $t=\pm3/\sqrt{5}$. Il punto P è quindi uno di questi due: $(\pm3/\sqrt{5}\,,\,\pm6/\sqrt{5})$. Il raggio cercato è il modulo del vettore $(P-C)$, cioè $R=\sqrt{\left(\pm3/\sqrt{5}-3\right)^2+\left(\pm6/\sqrt{5}\right)^2}$.

<u>Altro modo</u> (più geometrico) Il punto P cercato è il vertice di un triangolo rettangolo di base $(-3,0)$, $(3,0)$ i cui cateti sono il raggio e la tangente. Cioè P è all'intersezione tra la retta $y=2x$ e la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 3 che è $x^2+y^2=9$. Si trovano i due punti $(\pm3/\sqrt{5}\,,\,\pm6/\sqrt{5})$ e si conclude come sopra.



531. I vettori direzionali delle due rette sono $\vec{v}_1(1,2)$ e $\vec{v}_2(-1,3)$. Dato che il loro prodotto scalare è positivo, normalizzandoli e sommandoli si ottiene un vettore direzionale per la bisettrice

dell'angolo acuto.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\,,\,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}}\,,\,\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{10}}\right)$$ o anche $(\sqrt{2}-1\,,\,2\sqrt{2}+3)$.

Le due rette si intersecano in $(0,0)$, quindi anche la bisettrice passa per l'origine e una sua rappresentazione parametrica è perciò: $\begin{cases} x=(\sqrt{2}-1)t \\ y=(2\sqrt{2}+3)t \end{cases}$. I centri delle circonferenze cercate sono i punti della bisettrice che distano 2 da una di esse, per esempio dalla prima, cioè tali che:

$$\frac{|\,(\sqrt{2}-1)t-2(2\sqrt{2}+3)t\,|}{\sqrt{5}}=2 \;\Big|\; t=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$ da cui i punti $\left(\pm\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{5}\,,\,\pm\frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{10}}{5}\right)$

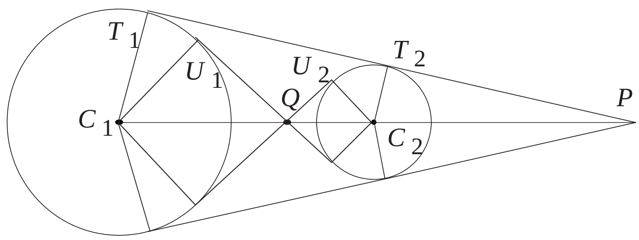
Le circonferenze cercate hanno centro nei punti trovati e naturalmente raggio 2.

532. a. La distanza dei due centri è $\sqrt{5}$ e va confrontata con i due raggi 1 e R. Notiamo che il centro della seconda circonferenza è esterno alla prima perché la distanza tra $(2,3)$ e $(1,1)$ è maggiore di 1. Quindi le due circonferenze sono esterne se $R+1<\sqrt{5}$, etc.
In dettaglio:
Se $R<\sqrt{5}-1$ sono esterne. Se $R=\sqrt{5}-1$ sono tangenti esternamente.
Se $\sqrt{5}-1<R<\sqrt{5}+1$ sono incidenti. Se $R=\sqrt{5}+1$ sono tangenti internamente.
Se $R>\sqrt{5}+1$ la prima è interna alla seconda.

b. Scriviamo il sistema (non lineare !) delle equazioni delle circonferenze. Sostituendo la seconda equazione con la differenza si ottiene il sistema equivalente $\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=1 \\ 2x+4y=12-R^2 \end{cases}$
La retta $2x+4y=12-R^2$ è quella passante quindi per gli eventuali punti comuni alle due circonferenze. Nei casi di tangenza ($R=\sqrt{5}\mp 1$) le rette tangenti sono quindi $2x+4y=6\pm\sqrt{5}$.

c. Si procede esattamente come nel caso precedente e si scrive la retta ottenuta per $R=3$ e cioè $2x+4y=3$

533. Le circonferenze sono esterne e hanno centri rispettivamente $C_1(1,2)$ e $C_2(1,-2)$ e raggi $R_1=\sqrt{2}$ e $R_2=1$. Le due tangenti esterne si incontrano in un punto P tale che i triangoli PC_1T_1 e PC_2T_2 siano simili, cioè tali che i triangoli PC_1T_1 e PC_2T_2 siano simili, cioè tali che $\frac{PC_1}{PC_2}=\frac{R_1}{R_2}$. Analogamente le due esterne si incontrano in un punto Q tale che i triangoli QC_1U_1 e QC_2U_2 siano simili, cioè tali che $\frac{PC_1}{PC_2}=\frac{R_1}{R_2}$ (stessa uguaglianza).



Dato che la retta congiungente i due centri è $\{x=1\;;\;y=t\}$, P e Q saranno del tipo $(1,t)$ e dall'uguaglianza si trova $t=-6\pm 4\sqrt{2}$. (Col segno "−" si ha Q). Ora basta condurre da P e da Q le due rette tangenti a una qualunque delle due circonferenze e si hanno le quattro tangenti comuni.
Due delle tangenti passano per $P(1,-6-4\sqrt{2})$ e hanno coefficiente angolare $m=\pm\sqrt{47+32\sqrt{2}}$; le altre due passano per $Q(1,-6+4\sqrt{2})$ e hanno coefficiente angolare $m=\pm\sqrt{47-32\sqrt{2}}$.

Geometria lineare nello spazio

541. Un vettore normale al piano α è $\vec{n}=(1,-3,1)$.

a. Il piano parallelo è $1(x-0)-3(y-1)+1(z-2)=0$, cioè $x-3y+z+1=0$.

b. Un piano per P ortogonale ad α è $a(x-0)+b(y-1)+c(z-2)=0$ con $(a,b,c)\cdot(1,-3,1)=0$, cioè $a-3b+c=0$. Quindi ce ne sono infiniti; per esempio per $(a,b,c)=(1,0,-1)$ otteniamo $x-z+2=0$, per $(a,b,c)=(1,1,2)$ otteniamo $x+y+2z-5=0$.

c. La retta ha come vettore direzionale $\vec{n}$ e passa per P, quindi una sua rappresentazione parametrica è $\{x=0+t\quad;\quad y=1-3t\quad;\quad z=2+t\}$

d. Occorre intersecare la retta r ottenuta in c. con α.
Sostituendo r in α: $(t) - 3(1-3t) + (2+t) = 0$ da cui $11t = 1$. Quindi per $t = 1/11$ si ha il punto proiezione: $P_0 = (1/11\ ,\ 8/11\ ,\ 23/11)$.

542. Un vettore direzionale per r è $\vec{v} = (2, 1, -1)$.

a. È evidentemente $\{x = 2t \quad ; \quad y = 1 + t \quad ; \quad z = 2 - t\}$

b. Un vettore $\vec{w} = (l, m, n)$ è ortogonale a $\vec{v}$ se $(l, m, n,) \cdot (2, 1, -1) = 0$ cioè se $2l + m - n = 0$.
Quindi ci sono infinite rette passanti per P e ortogonali a r. Per esempio:
Scegliendo $\vec{w} = (0, 1, 1)$ si ha la retta $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ Scegliendo $\vec{w} = (1, -1, 1)$ si ha la retta $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$

c. Il piano passante per P e ortogonale a r è $2(x-0)+1(y-1)-1(z-2) = 0$, cioè $2x+y-z+1 = 0$.

d. Intersechiamo il piano trovato sopra con r sostituendo i punti di r nell'equazione del piano: $2(1 + 2t) + (1 + t) - (-t) + 1 = 0$, da cui $6t + 4 = 0$. Per $t = -2/3$ otteniamo il punto $P_1(-1/3\ ,\ 1/3\ ,\ 2/3)$, proiezione ortogonale di P su r.

e. La distanza di P da r è uguale alla distanza tra P e P_1:
$d = \sqrt{(0 + 1/3)^2 + (1 - 1/3)^2 + (2 - 2/3)^2} = \sqrt{7/3}$.

f. La retta cercata è la retta passante per P e P_1:
$\begin{cases} x = 0 + (-1/3 - 0)t \\ y = 1 + (1/3 - 1)t \\ z = 2 + (2/3 - 2)t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 - t/3 \\ y = 1 - 2t/3 \\ z = 2 - 4t/3 \end{cases}$ Sostituendo per comodità t con $-3t$ $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$

543. a. Per rappresentare parametricamente r occorre porre $y = t$, perché altrimenti non è possibile ricavare y per $k = 0$. La rappresntazione è immediata.

b. Intersechiamo r con α sostituendo i punti di r nell'equazione del piano: $(k - t) + 2(t) + (1 - k^2 t) = 0$, da cui l'equazione di primo grado in t: $(1 - k^2)t = -k - 1$.
$r : \begin{cases} x = k - t \\ y = t \\ z = 1 - k^2 t \end{cases}$
Se $k \neq \pm 1$, l'equazione ha una soluzione, per cui la retta e il piano sono incidenti.
Per vedere se in qualche caso possono anche essere ortogonali vediamo se sono proporzionali il vettore direzionale di r che è $(-1, 1, -k^2)$ e il vettore normale del piano $(1, 2, 1)$. Il rapporto delle prime coordinate è -1, mentre quello delle seconde è $1/2$, quindi per nessun valore di k sono ortogonali.
Se $k = 1$, l'equazione non ha soluzioni, per cui la retta è parallela al piano.
Se $k = -1$, l'equazione è soddisfatta da ogni t, per cui la retta giace sul piano.

544. I vettori $(B - A) = (2, 0, 1)$ e $(B - C) = (2, 2, -1)$ non sono paralleli per cui A, B, C non sono allineati. Il piano dei tre punti ha come vettore normale $(B-A) \wedge (B-C) = (2, 0, 1) \wedge (2, 2, -1) = (-2, 4, 4)$ o anche $(1, -2, -2)$.
Quindi il piano è $1(x - 0) - 2(y - 1) - 2(z - 0) = 0$ cioè $x - 2y - 2z + 2 = 0$.

545. Modo 1: La retta è $r : \{x - y = 0 \quad ; \quad y + z - 2 = 0\}$, quindi il fascio di piani di asse r è $a(x - y) + b(y + z - 2) = 0$. Tra questi piani, l'unico passante per $(1, 0, 3)$ si ottiene per a, b tali che $a(1 - 0) + b(0 + 3 - 2) = 0$, cioè $a + b = 0$, per esempio $a = 1$ e $b = -1$, da cui il piano $x - 2y - z + 2 = 0$.

Modo 2: Un vettore parallelo a r è $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Un punto di r è per esempio $P_0(0, 0, 2)$. Il piano cercato ha come vettore normale $\vec{n} = \vec{v} \wedge (P - P_0)$ cioè $(1, 1, -1) \wedge ((1, 0, 3) - (0, 0, 2)) = (1, 1, -1) \wedge (1, 0, 1) = (1, -2, -1)$, quindi il piano è $1(x - 1) - 2(y - 0) - 1(z - 3) = 0$ ovvero $x - 2y - z + 2 = 0$.

546. Scriviamo le due rette in forma parametrica con due parametri diversi:
$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 + u \\ y = k - 2u \\ z = 3 - u \end{cases}$ Intersechiamole: $\begin{cases} t = -1 + u \\ 1 - t = k - 2u \\ t = 3 - u \end{cases}$ $\begin{cases} t - u = -1 \\ -t + 2u = k - 1 \\ t + u = 3 \end{cases}$
Si vede subito che il sistema lineare 3×2 in t, u ha soluzione solo se $k = 4$. La soluzione è $t = 1 \quad ; \quad u = 2$. I due valori forniscono su ciascuna delle rette lo stesso punto comune $(1, 0, 1)$.
I vettori direzionali delle due rette sono $(1, -1, 1)$ e $(1, -2, -1)$. Un vettore normale per il piano

è perciò $(1,-1,1) \wedge (1,-2,-1) = (3,2,-1)$.
Quindi il piano è $3(x-1)+2(y-0)-1(z-1)=0$, cioè $3x+2y-z=2$.

547. Si tratta innanzitutto di determinare il numero di soluzioni del sistema lineare delle equazioni dei tre piani che è associato alla matrice seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & k+1 & 0 \\ 0 & 2-2k^2 & 4k+3 & k^2+3 \end{array}\right)$$ Riduciamo con $R_2 \to R_2 - 2R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 0 & 2-2k^2 & k-1 & 8 \\ 0 & 2-2k^2 & 4k+3 & k^2+3 \end{array}\right) \quad \text{e poi con } R_3 \to R_3 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 0 & 2-2k^2 & k-1 & 8 \\ 0 & 0 & 3k+4 & k^2-5 \end{array}\right)$$

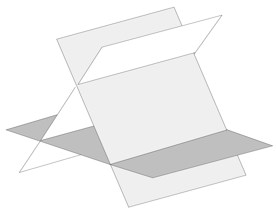
Guardando la diagonale del sistema, si vede che è ridotto se $k \neq 1, -1, -4/3$, pertanto per questi valori il sistema ha un'unica soluzione e i tre piani si intersecano in un solo punto.

Esaminiamo i tre casi particolari:

• Se $k=1$, allora la seconda equazione del sistema ridotto diventa $0=8$, pertanto il sistema non ha soluzione. Per capire come sono disposti i tre piani esaminiamoli:
$\alpha:\ x+y+z=-4 \qquad \beta:\ 2x+2y+2z=0 \qquad \gamma:\ 7z=4$
Si constata subito che α e β sono paralleli, mentre γ incide α e β e per questo motivo i piani non hanno punti in comune.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

• Se $k=-1$, dalla matrice si vede subito che ha ∞^1 soluzioni e perciò i piani costituiscono un fascio: esaminiamo allora i tre piani:
$\alpha:\ x+y+z=-4 \qquad \beta:\ 2x+2y=0 \qquad \gamma:\ -z=4$
Le tre equazioni sono una rappresentazione cartesiana dell'asse del fascio. Ne bastano due per avere una rappresentazione cartesiana della retta: $\{2x+2y=0\ ;\ -z=4\}$. Una rappresentazione parametrica è $\{x=-t\ ;\ y=t\ ;\ z=-4\}$; da essa si ricava subito un vettore direzionale: $\vec{v}=(-1,1,0)$



• Se $k=-4/3$, l'ultima equazione è $0=-29/9$, pertanto il sistema non ha soluzioni. Esaminando i tre piani α,β,γ, si vede subito che essi non sono a due a due paralleli, ciò significa che sono disposti come in figura e per tale motivo non hanno punti a comune.

548. Parametrizziamo r: $\{x=2t \quad ; \quad y=t \quad ; \quad z=0\}$. Un vettore parallelo a r è quindi $(2,1,0)$.

a. Il piano ortogonale a r passante per P è $2x+y-2=0$. Intersecandolo con r si trova il punto proiezione su r che è $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$.

Per quanto riguarda la proiezione su α, osserviamo che il punto P giace sul piano α e pertanto la sua proiezione su α è P stesso.

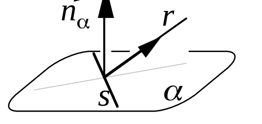
b. Modo 1: Scriviamo il fascio di piani di asse r: $a(x-2y)+bz=0$. Questi piani hanno vettore normale $(a,-2a,b)$. Un vettore normale ad α è $(1,-3,-1)$, quindi il piano del fascio che proietta r su α è quello ortogonale ad α, cioè tale che $(a,-2a,b)\cdot(1,-3,-1)=0$.

Si trova $7a-b=0$. Per esempio $a=1$ e $b=7$, da cui il piano $x-2y+7z=0$. La retta è quindi: $\begin{cases} x-2y+7z = 0 \\ x-3y = z \end{cases}$

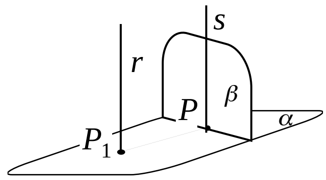
Modo 2: L'intersezione tra r e α è $(0,0,0)$. Un altro punto di r è per esempio $P(2,1,0)$. La retta che proietta ortogonalmente P su α è $\{x=2+t;\ y=1-3t;\ z=0-t\}$. L'intersezione tra questa retta e α è $(23/11\ ,\ 8/11\ ,\ -1/11)$. La retta proiezione cercata è quella passante per questo punto e per $(0,0,0)$, cioè $\{x=23t\ ;\ y=8t\ ;\ z=-t\}$ (è ovviamente la stessa trovata sopra).

549. La retta s è ortogonale sia a $\vec{n}_\alpha=(1,2,1)$ che a $\vec{v}_r=(1,1,1)$. Quindi come suo vettore direzionale possiamo prendere il vettore $\vec{v}=(1,2,1)\wedge(1,1,1)=(1,0,-1)$.
Inoltre la retta passa per il punto di intersezione di α e r che è

$P=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. La retta è quindi $\begin{cases} x = 1/4+t \\ y = 1/4 \\ z = 1/4-t \end{cases}$



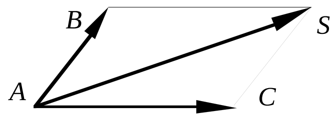
550. a. Un vettore direzionale di r è $\vec{v}=(2,1,3)$. La retta s è quindi $\{x=2t\ ;\ y=1+t\ ;\ z=3t\}$. Intersechiamo r con il piano α passante per $P(0,1,0)$ e ortogonale a r che è $2x+y+3z-1=0$. Si trova il punto $P_1\left(\frac{4}{7},\frac{2}{7},-\frac{1}{7}\right)$. La distanza tra le due rette parallele è uguale a quella tra i punti P e P_1 che è $d=\sqrt{6/7}$.



b. Il piano β è quello che passa per P ed è ortogonale al vettore $(P_1-P)=(4/7\ ,\ -5/7\ ,\ -1/7)$ e cioè $4x-5y-z+5=0$.

551. a. È il modulo del vettore $(C-A)\wedge(B-A)=(-2,0,1)\wedge(-1,-1,3)=(1,5,2)$ e cioè $\sqrt{30}$.

b. Come si vede dalla figura si deve avere
$(S-A)=(B-A)+(C-A)$
Quindi $\quad (S-A)=(-1,-1,3)+(-2,0,1)=(-3,-1,4)$
da cui $\quad S=(2,1,0)+(-3,-1,4)=(-1,0,4)$



c. Il volume del parallelepipedo è come noto il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori. Poniamo $D=(x_0,0,0)$. Si deve avere $\mid (B-A)\wedge(C-A)\cdot(D-A)\mid=3$. Il vettore $(B-A)$ è già stato calcolato ed è $(-1,-5,-2)$, quindi: $\mid (-1-5,-2)\cdot(x_0-2,-1,0)\mid=3$ da cui $\mid -x_0+2+5\mid=3 \quad x_0=\pm3+7$. Quindi i punti cercati sono $D_1=(4,0,0)$ e $D_2=(10,0,0)$.

552. a. Parametrizziamo le due rette con due parametri diversi.

$\begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x &= 3u-2 \\ y &= u \\ z &= -u \end{cases}$ I vettori direzionali sono rispettivamente $\vec{v}_r=(1,1,0)$ $\vec{v}_s=(3,1,-1)$ Vediamo se hanno punti comuni: $\begin{cases} t &= 3u-2 \\ t &= u \\ 2 &= -u \end{cases}$

Evidentemente il sistema 3×2 in t,u non ha soluzioni, e i vettori direzionali non sono proporzionali, quindi le rette sono sghembe.

b. Le rette incidenti entrambi sono quelle passanti per $(t,t,2)$ e $(3u-2,u,-u)$:

$\begin{cases} x &= t+(3u-2-t)v \\ y &= t+\qquad (u-t)v \\ z &= 2+\quad (-u-2)v \end{cases}$ Il parametro t scorre su r, il parametro u su s, il parametro v sulle rette. Un loro vettore direzionale è $(3u-2-t\ ,\ u-t\ ,\ -u-2)$.

c. Imponiamo l'ortogonalità sia a r che a s. Dato che $\vec{v}_r=(1,1,0)$ e $\vec{v}_s=(3,1,-1)$, allora:

$\begin{cases} (3u-2-t\ ,\ u-t\ ,\ -u-2)\cdot(1,1,0) &= 0 \\ (3u-2-t\ ,\ u-t\ ,\ -u-2)\cdot(3,1,-1) &= 0 \end{cases}$ Si ricava il sistema lineare in t e u: $\begin{cases} 4u-2t &= 2 \\ 11u-4t &= 4 \end{cases}$ che ha la soluzione $t=-1\ ;\ u=0$. Per questi valori di t e u si ricava la retta che è quindi: $\{x=-1-v\quad ;\quad y=-1+v\quad ;\quad z=2-2v\}$.

d. Imponiamo il parallelismo (non l'uguaglianza !) con il vettore $(1,1,1)$. Basta imporre che $(3u-2-t\ ,\ u-t\ ,\ -u-2)\wedge(1,1,1)=(0,0,0)$, cioè $(2u-t+2\ ,\ -4u+t\ ,\ 2u-2)=(0,0,0)$
Si ricava il sistema lineare 3×2 in t e u a lato che ha una soluzione: $t=4\ ;\ u=1$. Per questi valori di t e u si ricava la retta cercata: $\{x=1+t\ ;\ y=1+t\ ;\ z=-1+t\}$

$$\begin{cases} 2u-t &= -2 \\ -4u+t &= 0 \\ 2u &= 2 \end{cases}$$

e. I valori di t e u ricavati in c. forniscono i punti di r e s giacenti sulla retta ortogonale a entrambe e che sono anche i punti di minima distanza. I punti sono $P_r(-1,-1,2)\quad P_s(-2,0,0)$. La distanza tra r e s è la distanza tra P_r e P_s : $d=\sqrt{(-2+1)^2+(0+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{6}$.

553. Le rette giacenti sul piano hanno vettore direzionale ortogonale al vettore normale del piano α che è $\vec{n}=(1,-2,1)$.

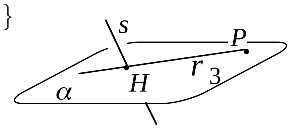
a. Il vettore di r_1 sarà il prodotto vettore tra $\vec{n}$ e il vettore $(1,0,0)$ (parallelo all'asse x) e cioè $(0,1,2)$. La retta è quindi:

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 0+t \\ z &= -1+2t \end{cases}$$

b. Il vettore di r_2 sarà il prodotto vettore tra i vettori normali ai due piani $(1,-2,1)$ e $(3,0,-1)$ e cioè $(2,4,6)$ o anche $(1,2,3)$. La retta è quindi:

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 0+2t \\ z &= -1+3t \end{cases}$$

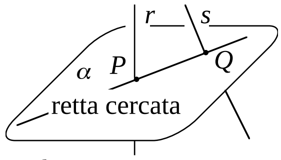
c. Determiniamo innanzitutto l'intersezione di s con il piano risolvendo il sistema lineare: $\{x-3y=0\quad ;\quad z-2=0\quad ;\quad x-2y+z=0\}$
Si trova il punto $H(-6,-2,2)$. La retta r_3 è perciò quella passante per $P(1,0,-1)$ e per $H(-6,-2,2)$ e cioè:



$$\begin{cases} x &= 1-7t \\ y &= 0-2t \\ z &= -1+3t \end{cases}$$

554. Parametrizziamo r: $\{x = t \quad ; \quad y = t \quad ; \quad z = 3t + 2\}$. Quindi $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$. Le rette cercate giacciono tutte sul piano α passante per $P(0, 0, 2)$ e ortogonale a r che è $x + y + 3z - 6 = 0$.

a. La retta cercata, giacendo sul piano α, intersecherà s nello stesso punto in cui s incontra α. Il punto di intersezione tra s e α è il punto $Q(6/5, 6/5, 6/5)$.
La retta cercata è quindi quella passante per $P(0, 0, 2)$ e per $Q(6/5, 6/5, 6/5)$, cioè $\{x = 6t/5 \quad ; \quad y = 6t/5 \quad ; \quad z = 2 - 4t/5\}$.

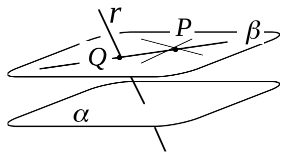


b. La retta cercata è ortogonale sia a r che s, quindi come vettore direzionale per essa possiamo prendere $\vec{v}_s \wedge \vec{v}_r = (1, 1, 1) \wedge (1, 1, 3) = (2, -2, 0)$ o anche $(1, -1, 0)$. Inoltre passa per $(0, 0, 2)$. La retta è $\{x = t \quad ; \quad y = -t \quad ; \quad z = 2\}$.

c. Chiamiamo p le rette cercate. Per calcolare la distanza tra p e s, si calcola la distanza di un punto di p (l'unico che conosciamo è $(0, 0, 2)$) dal piano passante per s e parallelo a p. Il piano è del tipo $a(x-y)+b(y-z) = 0$. Senza avere ancora il piano, dato che non conosciamo p, possiamo però imporre uguale a 1 la sua distanza da $(0, 0, 2)$. Si ha:
$\dfrac{|\, a(x-y) + b(y-z) \,|}{\sqrt{a^2 + (-a+b)^2 + b^2}} = 1$ per $(x, y, z) = (0, 0, 2)$, cioè $a^2 - ab - b^2 = 0$, da cui $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\, b$.
Per esempio $a = 1 \pm \sqrt{5}$ e $b = 2$. I piani trovati sono paralleli a p. Le rette p giacciono su piani paralleli a questi e precisamente sui piani passanti per $(0, 0, 2)$ e paralleli ai piani trovati. Inoltre giacciono sempre sul piano $x + y + 3z - 6 = 0$
Le rette sono quindi: $\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ (1 \pm \sqrt{5})(x - y) + 2(y - z + 2) = 0 \end{cases}$

555. I punti la cui proiezione sulla retta s è $(0, 0, 0)$ giacciono tutti sul piano passante per $(0, 0, 0)$ e ortogonale a s che è $2x + y - 2z = 0$. Intersecando questo piano con la retta r si trova il punto è $(2, 2, 3)$ che è il punto cercato.

556. Le rette giacciono tutte sul piano β passante per P e parallelo al piano dato che è il piano $x+3y-z-8 = 0$. La retta r e il piano β si intersecano nel punto $Q(9, 3, 10)$. La retta cercata deve intersecare r proprio nel punto Q. La retta è quindi quella passante per P e Q, cioè: $\{x = 1 + 8t \quad ; \quad y = 2 + t \quad ; \quad z = -1 + 11t\}$.



557. a. Parametrizziamo r e s con due parametri diversi:
$r \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ $s \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases}$ Quindi: $\vec{v}_r = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_s = (2, 2, 1)$ Il sistema in t e u $\begin{cases} t + 1 = 2u - 5 \\ 1 = 2u - 2 \\ t = u \end{cases}$
non ha soluzioni. Inoltre le rette non sono parallele perché $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non sono proporzionali, quindi le rette sono sghembe.

b. I piani contenenti r sono $a(x - z - 1) + b(y - 1) = 0$ e hanno vettore normale $(a, b, -a)$. Tra essi quello parallelo a s è tale che $(a, b, -a) \cdot (2, 2, 1) = 0$, cioè $a + 2b = 0$, per esempio $a = 2$; $b = -1$, da cui il piano $2x - y - 2z - 1 = 0$. Un punto di s è $(-5, -2, 0)$, quindi la distanza d tra r e s è quella tra il punto e il piano, cioè $d = 3$.

c. Le rette incidenti entrambi hanno come vettore direzionale
$(t + 1, 1, t) - (2u - 5, 2u - 2, u) = (t - 2u + 6\,,\ -2u + 3\,,\ t - u)$
Occorre che questo vettore sia ortogonale a $\vec{v}_r$ e a $\vec{v}_s$, cioè:
$\begin{cases} (t - 2u + 6\,,\ -2u + 3\,,\ t - u) \cdot (1, 0, 1) = 0 \\ (t - 2u + 6\,,\ -2u + 3\,,\ t - u) \cdot (2, 2, 1) = 0 \end{cases}$ Si ricava il sistema lineare in t e u: $\begin{cases} 2t - 3u = -6 \\ 3t - 9u = -18 \end{cases}$
che ha la soluzione $t = 0$; $u = 2$. Per questi valori di t e u si ricavano i punti di r e s che definiscono la retta ortogonale a entrambe: $P_r(1, 1, 0)$, $P_s(-1, 2, 2)$ e la retta che è $\{x = 1 - 2t \quad ; \quad y = 1 + t \quad ; \quad z = 2t\}$.

d. Il piano è parallelo al piano trovato in b. e passante per il punto $M = (0, 3/2, 1)$ che è il punto medio tra P_r e P_s. Il piano è $2x - y - 2z + 7/2 = 0$.

e. I piani contenenti la retta r sono $a(x - z - 1) + b(y - 1) = 0$ e hanno vettore normale $(a, b, -a)$. Perché la proiezione di P_1 su α abbia distanza 1 da P_s occorre che sia uguale a 1 la distanza di P_s da α. Si ha: $\dfrac{|\, a(-1 - 2 - 1) + b(2 - 1) \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + a^2}} = 1$. Si ricava $14a^2 - 8ab = 0$ o anche $a(7a-4b)=0$. Quindi un piano si ottiene per esempio per $a=0$ e $b=1$ ed è $y=1$. L'altro per esempio per $a=4$ e $b=7$ ed è $4x+7y-4z-11=0$.

f. I punti di r sono $(t+1,1,t)$. Per misurarne la distanza da s scriviamo i piani passanti per ciascuno di questi punti e ortogonali ad s: $2(x-t-1)+2(y-1)+(z-t)=0$.
Intersechiamo questi piani con s facendo attenzione che il parametro che scorre su s abbia un nome diverso da t. La retta s è $\{x=2u-5\ ;\ y=2u-2\ ;\ z=u\}$. Sostituendo si ha: $9u-3t-18=0$. Dato che stiamo ora cercando un punto di s, l'equazione va risolta rispetto a u: $u=(t+6)/3$. Sostituendo in s si ottiene il punto dipendente da t che è la proiezione ortogonale di $(t+1,1,t)$ su s. Il punto è $((2t-3)/3\ ,\ (2t+6)/3\ ,\ (t+6)/3)$. Poniamo uguale a 6 la distanza tra i due punti: $\sqrt{\left(\frac{2t-3}{3}-(t+1)\right)^2+\left(\frac{2t+6}{3}-1\right)^2+\left(\frac{t+6}{3}-t\right)^2}=6$
da cui $t^2=27$ e $t=\pm3\sqrt{3}$. Pertanto i punti di r cercati sono $(\pm3\sqrt{3}+1,1,\pm3\sqrt{3})$.

558. Il punto intersezione tra r e α è $P(2,0,4)$. Un vettore direzionale per r è $\vec{v}_r=(1,1,2)$, un vettore normale ad α è $\vec{n}_\alpha=(1,1,0)$.

a. La retta che forma angolo massimo è quella ortogonale a r. Passa per P e ha vettore direzionale ortogonale sia a $\vec{v}_r$ che a $\vec{n}_\alpha$, per esempio $(1,-1,0)$. È quindi: $\{x=2+t; y=-t; z=4\}$.

b. La retta che forma angolo minimo è la proiezione ortogonale di r sul piano. Scriviamo tutti i piani contenenti r: $a(x-y-2)+b(z-2x)=0$. Hanno vettore normale $(a-2b,-a,b)$. Quello tra essi che proietta r si ottiene imponendo che $(a-2b,-a,b)\cdot(1,1,0)=0$, per esempio per $a=1$ $b=0$. Il piano è quindi $x-y=2$. Quindi la retta è $\{x-y=2\ ;\ x+y=2\}$ che si può scrivere anche $\{x=2\ ;\ y=0\}$.

c. Sia (a,b,c) il vettore direzionale delle rette cercate. Perché giacciano sul piano occorre che $(a,b,c)\cdot(1,1,0)=0$, cioè che $b=-a$, quindi il vettore è $(a,-a,c)$. Perché si abbia $\theta=\pi/3$, occorre che $\frac{|\ (a,-a,c)\cdot(1,1,2)\ |}{\sqrt{a^2+a^2+c^2}\ \sqrt{6}}=\frac{1}{2}$, cioè $6a^2-5c^2=0$. Per esempio $a=\pm\sqrt{5}$ e $c=\sqrt{6}$.
Le rette passano per $P(2,0,4)$ e sono quindi: $\{x=2\pm\sqrt{5}t\quad;\quad y=\mp\sqrt{5}t\quad;\quad z=4+\sqrt{6}t\}$.

559. Osserviamo innanzitutto che r ha vettore direzionale $\vec{v}\,(2,1,2)$ e che α ha vettore normale $\vec{n}\,(3,-2,1)$.

a. Proiettiamo P su r. Per questo occorre il piano passante per P e ortogonale a r che è $2x+y+2z=6$; intersecandolo con r si trova la proiezione di P su r che è il punto $M(16/9,8/9,7/9)$; il punto simmetrico è $P'=2M-P=(23/9,16/9,-4/9)$.

b. Proiettiamo P su α. Per questo occorre la retta passante per P e ortogonale ad α che è $\{x=1+3t\,;\ y=-2t\,;\ z=2+t\}$; intersecandola con α si trova la proiezione di P su α che è $N(-1/14,10/14,23/14)$; il punto simmetrico è $P''=2N-P=(-8/7,10/7,9/7)$.

c. È semplicemente $O'=2P-O=(2,0,4)$.

d. I punti di r si ottengono scrivendo una rappresentazione parametrica di r e sono $(2t,t,2t-1)$ al variare di t. Il punto simmetrico di $(2t,t,2t-1)$ rispetto a $P(1,0,2)$ è $(2-2t,-t,5-2t)$. Questi sono tutti e soli i punti di r'. La retta r' è pertanto: $\{x=2-2t; y=-t; z=5-2t\}$.

e. L'intersezione di r con α è il punto $I(1/3,1/6,-2/3)$. Prendiamo un punto qualunque di r per esempio $R(0,0,-1)$. La proiezione di R su α è il punto $N(3/14,-2/14,-13/14)$. Il simmetrico di R rispetto ad α è quindi $R'=2N-R=(3/7,-2/7,-6/7)$.
Allora r'' è la retta IR' e cioè $\{x=1/3-4t\,;\ y=1/6+19t\,;\ z=-2/3+8t\}$.

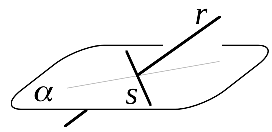
f. Un punto dell'asse x è $(u,0,0)$. La retta r ha vettore direzionale $(2,1,2)$.
Il punto simmetrico di $(u,0,0)$ rispetto a r è (x,y,z) tale che:

- $\frac{(x,y,z)+(u,0,0)}{2}\in r$, cioè $\left\{\frac{x+u}{2}=2\,\frac{y}{2}=\frac{z}{2}+1\right\}$ $\quad\{x-2y=u\,;\ 2y-z=2\}$
- $\Big((x,y,z)-(u,0,0)\Big)\cdot(2,1,2)=0$, cioè $2(x-u)+y+2z=0$.

Le tre equazioni trovate formano un sistema lineare 3×3 in x,y,z dipendente da u la cui soluzione è $\{x=(8-u)/9\,;\ y=(4+4u)/9\,;\ z=(8u-10)/9\}$: questo è il punto simmetrico di $(u,0,0)$ e quindi questa è una rappresentazione parametrica della retta simmetrica x'.

g. Dato che α contiene $O(0,0,0)$ e il simmetrico di O rispetto a P è $(2,0,4)$ (trovato in c.), allora il piano α' è il piano parallelo ad α e passante per $O'(2,0,4)$: $3x-2y+z=10$.

h. Consideriamo la retta s giacente su α e ortogonale e incidente a r.



La retta s è la retta passante per $I(1/3,1/6,-2/3)$ e avente vettore direzionale $\vec{v}_r \wedge \vec{n}_\alpha = (5,4,-7)$. Ogni punto di s, che è un punto di α, ha come simmetrico rispetto a r sempre un punto di s. Quindi s giace anche sul piano simmetrico α''.
Prendiamo ora un punto qualunque di α che non stia su r, per esempio $O(0,0,0)$. Il simmetrico di O rispetto a r si può calcolare come in a. ed è $Q(8/9,4/9,-10/9)$. Allora α'' è il piano contenente s e Q e cioè: $x-10y-5z-2=0$.

i. Il simmetrico di $(1,0,0)$ (che è un punto di $z=0$) rispetto ad α è $Q(-2/7,6/7,-3/7)$. Il piano β è il piano del fascio generato da α e $z=0$ che contiene Q. La sua equazione è: $3x-2y-6z=0$.

560. Simmetrici di P_0 sono risp. $(-x_0,-y_0,-z_0)$; $(-x_0,-y_0,z_0)$; $(x_0,y_0,-z_0)$
Simmetriche di r sono risp. $\{-x(y),-y(t),-z(t)\}$; $\{-x(y),-y(t),z(t)\}$; $\{x(y),y(t),-z(t)\}$.
Simmetrici di α sono risp. $ax+by+cz+d=0$; $-ax-by+cz=d$; $ax+by-cz=d$.

561. La retta ha vettore direzionale $\vec{v}(1,2,-1)$, quindi i piani cercati hanno vettore normale ortogonale a $\vec{v}$. I vettori ortogonali a $\vec{v}$ sono (l,m,n) tali che $(l,m,n)\cdot(1,2,-1)=0$, cioè $(-2m+n,m,n)$. I piani sono pertanto $(-2m+n)(x-0)+m(y-2)+n(z-0)=0$. Ha senso calcolarne la distanza da r, dato che sono retta e piano sono paralleli. Per far questo basta calcolare la distanza di un punto qualunque di r, per esempio $(0,0,0)$ da essi e imporla, come richiesto, uguale a 1.
$$\text{dist}=\frac{|\,(-2m+n)(0-0)+m(0-2)+n(0-0)\,|}{\sqrt{(-2m+n)^2+m^2+n^2}}=1$$
Si ricava l'equazione $m^2-4mn+2n^2=0$ che, risolta per esempio rispetto a m, ha le due soluzioni $m=(2\pm\sqrt{2})n$. Ponendo $n=1$ si ricavano i due piani:
$(-2(2\pm\sqrt{2})+1)x+(2\pm\sqrt{2})(y-2)+z=0$.

562. a. Se esiste, la retta cercata è complanare a r. Dato che passa per P, allora deve giacere sul piano α contenente P e r che è $x=2y-1$.
Analogamente, se esiste, è complanare a s e deve giacere sul piano β contenente P e s che è $2x-y+3z-4=0$.
La retta quindi dev'essere $\begin{cases} x\ =\ 2y-1 \\ 2x-y+3z-4\ =\ 0 \end{cases}$. Ma va verificato che sia incidente sia r che s, dato che la complanarità non ne assicura l'incidenza. Dato che, come si calcola, incontra r in $(-3,1,3)$ e s in $(2,\ ,1/2\ ,1/6)$, allora è proprio la retta cercata.

b. Come in a. si determinano il piano $\alpha: x-2y+3z-2=0$ contenente r e P e il piano $\beta: 2x-y+3z-4=0$ contenente s e P, ma la retta $\begin{cases} x-2y+3z-2=0 \\ 2x-y+3z-4=0 \end{cases}$, come si verifca immediatamente, è parallela a r, non incidente. Pertanto la retta cercata non esiste.

Sfere e circonferenze nello spazio

571. a. Basta completare i quadrati:
$$x^2+(y^2+4y+4)+\left(z^2-3z+\frac{9}{4}\right)^2=4+\frac{9}{4} \qquad x^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$
Quindi il centro è $C\left(0\ ,\ -2\ ,\ \frac{3}{2}\right)$ e il raggio è $R=\frac{5}{2}$.

b. Occorre calcolare la distanza tra il centro C della sfera e il piano α.
$$d=\frac{|\,x+2y+z-2\,|}{\sqrt{6}}=\frac{|\,0+2(-2)+(3/2)-2\,|}{\sqrt{6}}=\frac{|\,-9/2\,|}{\sqrt{6}}=\frac{9}{2\sqrt{6}}$$
Confrontiamo ora d con R: $d=\frac{9}{2\sqrt{6}}$ $R=\frac{5}{2}$ Eleviamo a quadrato: $d^2=\frac{81}{24}$ $R^2=\frac{25}{4}$
Dato che $d^2<R^2$, allora $d<R$ quindi l'intersezione è una circonferenza.

La cosa più semplice da scrivere è l'asse che è la retta a passante per C e ortogonale ad α:

$$a : \begin{cases} x = t \\ y = -2+2t \\ z = 3/2+t \end{cases}$$

Intersecando l'asse con il piano α si trova il centro:
$(t) + 2(-2+2t) + (3/2+t) = 2$ da cui $t = 3/4$, quindi il centro della circonferenza è $C_1(3/4\ ,\ -1/2\ ,\ 9/4)$.

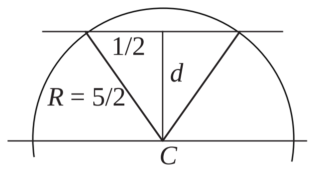
Infine il raggio R_1 della circonferenza si trova dalla relazione $R_1^2 = R^2 - d^2$, quindi:

$$R_1 = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{81}{24}} = \sqrt{\frac{23}{8}}$$

c. Il piano cercato è del tipo $x+2y+z+k=0$ e occorre che il piano abbia distanza R dal centro della sfera, quindi:
$\dfrac{|\ x+2y+z+k\ |}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{2}$ Sostituiamo (x,y,z) con $(0,-2,3/2)$ $\dfrac{|\ -4+3/2+k\ |}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{2}$ $|\ k-5/2\ | = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

Quindi $k = \dfrac{5}{2}(1 \pm \sqrt{6})$ e i piani sono $x+2y+z+\dfrac{5}{2}(1\pm\sqrt{6}) = 0$

d. Come si vede dallo schizzo, occorre che il piano abbia distanza d dal centro della sfera, dove $d^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$, cioè $d = \sqrt{6}$.



Il piano cercato è del tipo $x+2y+z+k=0$ e la sua distanza da C è come nel conto fatto sopra:
$d = \dfrac{|\ -4+3/2+k\ |}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ $\quad |\ k-5/2\ | = 6 \quad k = 5/2 \pm 6$.

I piani quindi sono due, un piano (segno $+$) è $x+2y+z+17/2=0$, l'altro (segno $-$) è $x+2y+z-7/2=0$

e. Intersechiamo la sfera con la retta sostituendo le equazioni parametriche della retta nella sua equazione: $t^2+t^2+t^2+4t-3t=0$ da cui $3t^2+t=0$ e $t_1 = -1/3 \quad ; \quad t_2 = 0$.
Quindi i due punti sono $P_1 = (-1/3\ ,\ -1/3\ ,\ -1/3) \quad P_2 = (0,0,0)$.
Il piano tangente alla sfera in P_1 ha come vettore normale
$(C-P_1) = \left(0,-2,\dfrac{3}{2}\right) - \left(-\dfrac{1}{3}\ ,\ -\dfrac{1}{3}\ ,\ -\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\ ,\ -\dfrac{5}{3}\ ,\ \dfrac{11}{6}\right)$ Quindi il piano è:
$\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right) + \left(-\dfrac{5}{3}\right)\left(y+\dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{11}{6}\right)\left(z+\dfrac{1}{3}\right) = 0$ o anche $2x-10y+11z+1=0$.
Il piano tangente alla sfera in P_2 ha come vettore normale
$(C-P_2) = (0,-2,3/2)-(0,0,0) = (0,-2,3/2)$
Quindi il piano è $-2y+(3/2)z=0$ o anche $4y-3z=0$.
Si può notare che, essendo il piano tangente alla sfera in $(0,0,0)$, la sua equazione è la parte di primo grado dell'equazione della sfera.

f. Intersechiamo la sfera con le rette sostituendo le equazioni parametriche nella sua equazione: $(t+1)^2+(kt)^2+9+4(kt)-3(3)=0$. Riordinando rispetto a t:
$(1+k^2)t^2+(2+4k)t+1=0$.
Al variare di k, le soluzioni dell'equazione di secondo grado in t forniscono i punti di intersezione della retta con la sfera.
La retta sarà incidente se le soluzioni sono due, tangente se le soluzioni sono una (con molteplicità 2), esterna se non ha soluzioni (o meglio se sono non reali).
Per sapere in quale situazione ci troviamo esaminiamo il discriminante dell'equazione di secondo grado: $\Delta = (2+4k)^2 - 4(1+k^2) = 12k^2+16k$.
Il discriminante è nullo se $k=0$ o $k=-4/3$.
Il discriminante è positivo se $k<-4/3$ o $k>0$.
Il discriminante è negativo se $-4/3<k<0$.
In conclusione

572. a. Il centro della circonferenza è la proiezione ortogonale di P su r. Per determinarla occorre il piano α perpendicolare a r e passante per P.

Scriviamo r in forma parametrica. Da essa si ricava subito che $(1,0,1)$ è un vettore parallelo a r e sarà anche il vettore normale del piano α che è quindi $1(x-0)+0(y-2)+1(z-1)=0$ cioè $x+z=1$.
$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 1 \\ z &= t-3 \end{cases}$$
Intersechiamo r con α : $t+(t-3)=1$ da cui $t=2$ e si ottiene da r il centro $C(2,1,-1)$.
Il raggio della circonferenza è la distanza tra P e r.:
$\text{dist}(P,r)=\text{dist}(P,C)=\mid(0,2,1)-(2,1,-1)\mid=\mid(-2,1,2)\mid=\sqrt{4+1+4}=3$

Il piano di giacenza è proprio α.
Una rappresentazione cartesiana di γ è perciò: $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9\\ x+z=1\end{cases}$

b. La retta è ortogonale al vettore $(P-C)=(-2,1,2)$. Inoltre deve giacere sul piano α. Quindi un vettore parallelo a t può essere $(P-C)\wedge\vec{n}_\alpha$
$$\begin{array}{c} (P-C) \\ \vec{n}_\alpha \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (1,4,-1)$$
Da qui la retta t che deve passare per $P(0,2,1)$
$$t\begin{cases} x &= 0+t \\ y &= 2+4t \\ z &= 1-t \end{cases}$$

c. Il centro delle sfere è un punto dell'asse cioè del tipo $A=(t,1,t-3)$.
Il raggio si può calcolare come la distanza tra A e un qualunque punto di γ, per esempio $P=(0,2,1)$.
$\mid(t,1,t-3)-(0,2,1)\mid=\mid(t\ ,\ -1\ ,\ t-4)\mid=\sqrt{t^2+1+t^2-8t+16}=\sqrt{2t^2-8t+17}$
Imponiamo che il raggio sia 9, quindi: $2t^2-8t-64=81$ da cui $2t^2-8t-64=0$. Si trovano $t_1=8$ e $t_2=-4$.
Per $t_1=8$ si ha il centro $(8,1,5)$ e la sfera $(x-8)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=81$
Per $t_2=-4$ si ha il centro $(-4,1,-7)$ e la sfera $(x+4)^2+(y-1)^2+(z+7)^2=81$

d. Come sopra il raggio è $\sqrt{2t^2-8t+17}$. Perché la sfera sia tangente al piano $x=5$ occorre che il raggio sia la distanza tra A e il piano $x=5$.
La distanza tra A e il piano $x=5$ è $\mid t-5\mid$, da cui le eguaglianze:
$\sqrt{2t^2-8t+17}=\mid t-5\mid \quad\Rightarrow\quad 2t^2-8t+17=t^2-10t+25 \quad\Rightarrow\quad t^2+2t-8=0$
L'ultima equazione ha le soluzioni $t=-4,2$, pertanto le sfere hanno centri rispettivamente $(-4,1,-7)$ e $(2,1,-1)$ e raggi $\mid-4-5\mid=9$ e $\mid 2-5\mid=3$. Le sfere sono quindi:
$(x+4)^2+(y-1)^2+(z+7)^2=81 \qquad (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$
La prima sfera è una di quelle già trovate in c.

573. a. Calcoliamo le tre distanze:
$$\begin{array}{lclclcll} \text{dist}(C_0,A) &=& \mid(A-C_0)\mid &=& \mid(2,-1,-1)\mid &=& \sqrt{2^2+1^2+1^2} &= \sqrt{6} \\ \text{dist}(C_0,B) &=& \mid(B-C_0)\mid &=& \mid(1,2,1)\mid &=& \sqrt{1^2+2^2+1^2} &= \sqrt{6} \\ \text{dist}(C_0,C) &=& \mid(C-C_0)\mid &=& \mid(1,-2,-1)\mid &=& \sqrt{1^2+2^2+1^2} &= \sqrt{6} \end{array}$$
La sfera esiste perché le tre distanze sono uguali. La rappresentazione è immediata dato che abbiamo centro e raggio: $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

b. La circonferenza può essere rappresentata come intersezione tra la sfera e il piano contenente i tre punti. Il piano ha come vettore normale per esempio $(A-B)\wedge(A-C)$.
$$\begin{array}{l}(A-B)=(1-3,-2)\\(A-C)=(1,1,0)\end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}=(2,-2,4) \text{ o anche } \vec{n}=(1,-1,2).$$
Quindi il piano è $\quad 1(x-2)-1(y-0)+2(z-0)=0 \qquad x-y+2z-2=0$
La circonferenza è $\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6 \\ x-y+2z-2=0 \end{cases}$

c. L'asse è la retta passante per C_0 e ortogonale ad α: $\begin{cases} x &= t \\ y &= 1-t \\ z &= 1+2t \end{cases}$
Il centro C_1 si trova intersecando a con il piano:
$(t)-(1-t)+2(1+2t)=2 \quad 6t-1=0 \quad t=1/6 \quad\Rightarrow\quad C_1=(1/6\,,\,5/6\,,\,4/3)$
Il raggio R_1 si ottiene per esempio dalla relazione $R_1^2=R^2-\text{dist}^2(C_1,C_0)$
Ma $\text{dist}^2(C_1,C_0)=\left|(0,1,1)-\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{4}{3}\right)\right|^2=\left|\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6},-\frac{1}{3}\right)\right|^2=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}=\frac{1}{6}$
Quindi $R_1^2=6-1/6=35/6$

d. La retta tangente è ortogonale al vettore $(A-C_0)=(2,-1,-1)$ e, dato che giace sul piano della circonferenza, è anche ortogonale al vettore normale del piano $\vec{n}=(1,-1,2)$. Quindi un suo vettore direzionale si può ottenere dal prodotto vettoriale
$(A-C_0)\wedge\vec{n}$ con $(A-C_0)=(2,-1,-1)$ $\vec{n}=(1,-1,2)$

$$\begin{array}{c} (A-C_0) \\ \vec{n} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}=(-3,-5,-1) \qquad \text{La retta tangente è: } \begin{cases} x = 2-3t \\ y = \quad -5t \\ z = \quad -t \end{cases}$$

574. a. I centri delle sfere sono punti della retta passante per $(1,1,0)$ e ortogonale a $x=y$. La retta è $\{x=1+t \quad ; \quad y=1-t \quad ; \quad z=0\}$ e quindi i centri sono i punti $C\,(1+t\ ,\ 1-t\ ,\ 0)$.
Il raggio delle sfere è la distanza tra C e $(1,1,0)$ e cioè $\sqrt{2}\mid t\mid$. Le sfere hanno quindi equazioni: $(x-(1+t))^2+(y-(1-t))^2+z^2=2t^2$.

b. Basta imporre $2t^2=2$. Si ottiene $t=\pm1$. Le sfere sono:
Per $t_1=1$ $\quad (x-2)^2+y^2+z^2=2$
Per $t_2=-1$ $\quad x^2+(y-2)^2+z^2=2$.

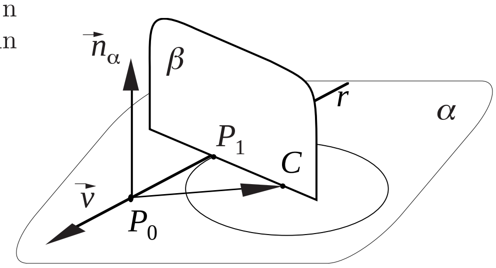
c. Bisogna che la distanza tra il centro $(1+t,1-t,0)$ e il piano $x+z=3$ sia $\sqrt{2}\mid t\mid$, quindi si ha: $\dfrac{\mid x+z-3\mid}{\sqrt{2}}=\dfrac{\mid(1+t)+(0)-3\mid}{\sqrt{2}}=\dfrac{\mid t-2\mid}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\mid t\mid$ da cui $t-2=2t$ e $t-2=-2t$.
Si ottengono $t_1=-2$; $t_2=2/3$. Le sfere sono quindi:
Per $t_1=-2$ $\quad (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=8$
Per $t_2=2/3$ $\quad (x-5/3)^2+(y-1/3)^2+z^2=8/9$

575. Un punto generico della retta è $(t,t,0)$. La retta è esterna perché sostituendo nell'equazione della sfera si ha $8t^2-4t+1=0$ e questa equazione di secondo grado non ha soluzioni.
La sfera è $x^2+y^2+z^2-x+2z+1/4=0$ o anche, completando i quadrati:
$(x^2-x+\underline{1/4})+y^2+(z^2+2z+\underline{1})=-1/4+\underline{1/4}+\underline{1}$, quindi ha centro $(1/2\ ,\ 0\ ,\ -1)$ e raggio 1.
I piani del fascio sono $a(x-y)+bz=0$. Per essere tangenti a S occorre che la loro distanza dal centro della sfera sia pari al raggio.
Quindi $\dfrac{\mid a(x-y)+bz\mid}{\sqrt{a^2+a^2+b^2}}=1$ per $(x,y,z)=(1/2,0,-1)$, cioè $\left|\dfrac{1}{2}a-b\right|=\sqrt{2a^2+b^2}$.
Elevando a quadrato i due termini positivi si ricava l'equazione omogenea in a,b di secondo grado $7a^2+4ab=0$ che ha le soluzioni $[\,a=0\ ;\ b$ qualunque $]$ $\quad [\,a=(-4/7)b\,]$.
Questi due insiemi di soluzioni danno luogo a due piani.
Per $a=0$ e per esempio $b=1$ si ha il piano $z=0$,
Ponendo per esempio $a=4$ e quindi $b=-7$ si ha il piano $4x-4y-7z=0$.

576. Osserviamo innanzitutto che il piano α della circonferenza è il piano che contiene C e r.
Un vettore direzionale per r è $\vec{v}=(2,1,-1)$. Un punto di r è per esempio $P_0=(1,1,0)$, quindi un vettore normale al piano α è $\vec{v}\wedge(C-P_0)$ dove
$(C-P_0)=(0,1,2)-(1,1,0)=(-1,0,2)$

$$\begin{array}{c} \vec{v} \\ (C-P_0) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to (2,-3,1)=\vec{n}_\alpha$$

Il piano α è $2(x-0)-3(y-1)+1(z-2)=0$
o anche $\quad \alpha:\ 2x-3y+z+1=0$



Per trovare il raggio della circonferenza occorre calcolare la distanza di C da r. Per questo occorre il piano β passante per C e ortogonale a r che è $2(x-0)+1(y-1)-1(z-2)=0$, cioè $2x+y-z+1=0$.
Intersechiamo il piano trovato sopra con r: $2(1+2t)+(1+t)-(-t)+1=0$, da cui $6t+4=0$.
Per $t=-2/3$ otteniamo il punto $P_1(-1/3\ ,\ 1/3\ ,\ 2/3)$, proiezione ortogonale di C su r, che è anche il punto di tangenza.
Il raggio è la distanza di C da r cioè la distanza tra C e P_1:
$R=\sqrt{(0+1/3)^2+(1-1/3)^2+(2-2/3)^2}=\sqrt{7/3}$.

Ora possiamo scrivere la circonferenza: $\begin{cases} 2x-3y+z+1=0 \\ (x-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=7/3 \end{cases}$

577. a. Scriviamo r in forma parametrica: $\{x = t+1 \ ; \ y = 1-2t \ ; \ z = t\}$. Quindi i vettori direzionali sono: $\vec{v}_r(1,-2,1)$ e $\vec{v}_s(1,0,-1)$. Le rette sono quindi ortogonali. Per vedere se sono sghembe confrontiamole, dopo aver cambiato nome al parametro di s:

$$\begin{cases} t+1 = u \\ 1-2t = 2 \\ t = 3-u \end{cases} \quad \begin{cases} t-u = -1 \\ 2t = -1 \\ t+u = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-u = -1 \\ 2t = -1 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni e le rette non sono parallele, quindi sono sghembe.

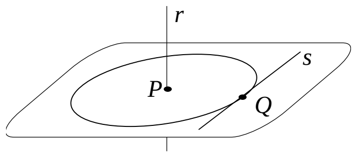
Per calcolare la distanza, scriviamo i punti di minima distanza imponendo che il vettore rappresentato dal segmento orientato di estremi $(t+1, 1-2t, t)$ e $(u, 2, 3-u)$ sia ortogonale a entrambe. Si deve perciò avere:

$$\begin{cases} (t+1-u, 1-2t-2, t-3+u)\cdot(1,-2,1) = 0 \\ (t+1-u, 1-2t-2, t-3+u)\cdot(1,0,-1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 5t = 0 \\ 4-2u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} t = 0 \\ u = 2 \end{cases}$$

Quindi per $t=0$ si ha $P(1,1,0)$ su r e per $u=2$ si ha $Q(2,2,1)$ su s. La loro distanza è $\sqrt{3}$ che è anche la distanza tra le due rette.

b. La circonferenza esiste perché la retta tangente è ortogonale all'asse. Il centro della circonferenza è P, il raggio è la distanza tra le rette cioè $\sqrt{3}$. Il piano della circonferenza è il piano passante per P e ortogonale a r cioè $x-2y+z+1=0$. Quindi una sua rappresentazione cartesiana è:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+z^2 = 3 \\ x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$$



578. I punti di r sono $(t \ , \ t \ , \ 1+t)$. Sono centri della sfera cercata se la loro distanza da α è 2.
Quindi $\dfrac{|\,(t)-3(t)\,|}{\sqrt{10}} = 2$. Si ricava $t = \pm\sqrt{10}$, quindi i centri sono $(\pm\sqrt{10} \ , \ \pm\sqrt{10} \ , \ 1\pm\sqrt{10})$.
Le sfere cercate hanno equazioni: $(x\pm\sqrt{10})^2 + (y\pm\sqrt{10})^2 + (z-1\pm\sqrt{10})^2 = 4$

579. a. Basta scrivere i vettori direzionali dei cateti:
$(B-A) = (2,1,0)-(1,0,2) = (1,1,-2) \qquad (A-C) = (1,0,2)-(0,-1,1) = (1,1,1)$
Si ha: $(B-A)\cdot(C-A) = (1,1,-2)\cdot(1,1,1) = 1+1-2 = 0$, quindi il triangolo è rettangolo.

b. Il punto H è sull'ipotenusa BC. L'ipotenusa ha rappresentazione parametrica:

$$\text{ip}\begin{cases} x = 2+(0-2)t \\ y = 1+(-1-1)t \\ z = 0+(1-0)t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1-2t \\ z = t \end{cases}$$

e ha vettore direzionale $\vec{v}_{ip} = (-2,-2,1)$.

Il punto H è del tipo $H = (2-2t, 1-2t, t)$ e si deve avere: $(H-A)\cdot\vec{v}_{ip} = 0$, cioè
$(2-2t-1, 1-2t-0, t-2)\cdot(-2,-2,1) = 0 \qquad -2+4t-2+4t+t-2 = 0.$
Si ricava $t = 2/3$. Quindi $H = (2/3 \ , \ -1/3 \ , \ 2/3)$.

La misura dell'altezza è $\text{dist}(A,H) = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}-2\right)^2} = \sqrt{\dfrac{18}{9}} = \sqrt{2}$

c. I due vettori $(B-A) = (1,1,-2)$ e $(A-C) = (1,1,1)$ sono paralleli al piano α, per cui un vettore normale ad α sarà un qualunque vettore non nullo ortogonale a entrambi, cioè $\vec{n} = (a,b,c)$ con $(a,b,c)\cdot(1,1,-2) = 0$ e $(a,b,c)\cdot(1,1,1) = 0$, cioè $\begin{cases} a+b-2c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$
Una soluzione non nulla del sistema omogeneo è per esempio $(1,-1,0)$, quindi il piano (che passa per esempio per A) è $1(x-1)-1(y-0)+0(z-2) = 0$, cioè $\alpha: \quad x-y = 1$

d. La circonferenza è circoscritta a un triangolo rettangolo, quindi il centro sarà il punto medio dell'ipotenusa, cioè $C_0 = \dfrac{B+C}{2} = \left(1 \ , \ 0 \ , \ \dfrac{1}{2}\right)$. Il raggio è la metà della lunghezza dell'ipotenusa, cioè $r = \dfrac{1}{2}\,\text{dist}(BC) = \dfrac{\sqrt{(2-0)^2+(1+1)^2+(0-1)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{9}}{2} = \dfrac{3}{2}$.
La circonferenza si può quindi ottenere come intersezione della sfera di centro C_0 e raggio r con il piano α contenente i tre punti.
Quindi una sua rappresentazione cartesiana è $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z-1/2)^2 = 9/4 \\ x-y = 1 \end{cases}$

e. La retta $\overline{AC}$ è $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Il punto A_1 quindi è del tipo $(t\,,\ t-1\,,\ t+1)$. Per formare un quadrato, occorre che $\operatorname{dist}(A, A_1) = \operatorname{dist}(A, B) = \sqrt{6}$

Quindi $\operatorname{dist}(A, A_1) = \sqrt{(t-1)^2 + (t-1-0)^2 + (t+1-2)^2} = \sqrt{6}$ da cui $3(t-1)^2 = 6$. L'equazione di secondo grado $(t-1)^2 = 2$ ha le due soluzioni $t = 1 \pm \sqrt{2}$.

La retta $\overline{AC}$ è stata parametrizzata in modo che si ottenga C per $t = 0$ e A per $t = 1$, quindi per ottenere il punto A_1 che è oltre A, occorrerà un valore del parametro maggiore di 1, quindi la soluzione cercata è $t = 1 + \sqrt{2}$. In conclusione: $A_1 = (1 + \sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\,,\ 2 + \sqrt{2})$

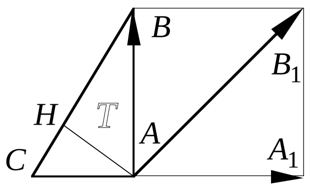
È evidente dalla figura la seguente relazione vettoriale

$(A_1 - A) + (B - A) = (B_1 - A)$

Esplicitando: $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) + (1, 1, -2) = (B_1 - A)$

$B_1 = A + (1 + \sqrt{2}\,,\ 1 + \sqrt{2}\,,\ -2 + \sqrt{2})$ e infine

$B_1 = (2 + \sqrt{2}\,,\ 1 + \sqrt{2}\,,\ \sqrt{2})$



580. Si ha: $(B - A) = (1, 0, -1)$ e $(C - A) = (1, -2, 0)$. I due vettori non sono paralleli per cui A, B, C non sono allineati.

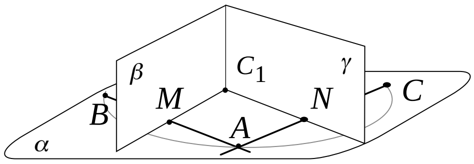
Il piano α contenente la circonferenza è il piano passante per i tre punti che ha come vettore normale $(C - A) \wedge (B - A) = (1, -2, 0) \wedge (1, 0, -1) = (2, 1, 2)$. Il piano è $\alpha :\ 2x + y + 2z = 3$

Il punto medio di $\overline{AB}$ è $M\ (1/2\,,\ 1\,,\ 1/2)$. Il piano β bisettore del segmento $\overline{AB}$ passa per M e ha vettore normale $(B - A) = (1, 0, -1)$ ed è quindi $\beta :\ x - z = 0$.

Il punto medio di $\overline{AC}$ è $N\ (1/2\,,\ 0\,,\ 1)$. Il piano γ bisettore del segmento $\overline{AC}$ passa per N e ha come vettore normale $(C - A) = (1, -2, 0)$ ed è quindi $\gamma :\ x - 2y = 1/2$.

Il centro C_1 della circonferenza è l'intersezione dei tre piani e si trova risolvendo il sistema 3×3 delle equazioni dei tre piani. Si trova $C_1 = (13/18\quad,\quad 1/9\quad,\quad 13/18)$.

Il raggio è la distanza tra C_1 e uno dei tre punti, per esempio $\mid C_1 - A) \mid = \sqrt{25/18}$.



Questi dati bastano a scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza $\begin{cases} (x - 13/18)^2 + (y - 1/9)^2 + (z - 13/18)^2 = 25/18 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

581. Un punto del piano è $(u - v\,,\ u\,,\ v)$. Imponendo che abbia distanza 1 da ciascuno degli altri due piani si hanno le relazioni: $\mid u - v \mid = 1\ ;\ \mid u + v + 1 \mid = \sqrt{2}$. Questi sono quattro sistemi lineari e hanno quindi quattro soluzioni. Le quattro sfere sono:
$(x-1)^2 + (y - 1 \pm \sqrt{2}/2)^2 + (z \pm \sqrt{2}/2)^2 = 1\ ;\ (x-1)^2 + (y \pm \sqrt{2}/2)^2 + (z - 1 \pm \sqrt{2}/2)^2 = 1$.

582. a. I centri di tutte le sfere che contengono la circonferenza sono sull'asse della circonferenza: $\{x = -1 + t\ ;\ y = -3t\ ;\ z = 0\}$; per essere tangenti a $x = 0$ le sfere devono avere raggio $R = \mid -1 + t \mid$, inoltre $R^2 = 1 + d^2$ (d distanza del centro dal piano della circonferenza). Si trovano i due valori $t = 0, -2/9$ per cui le due sfere sono $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $(x + 11/9)^2 + (y - 2/3)^2 + z^2 = 121/81$.

b. I punti sono $P_0(-1/7, 2/7, \pm 3/7)$. Le tangenti giacciono su $x = 3y - 1$, e quindi sono ortogonali a $\vec{n}(1, -3, 0)$; sono poi ortogonali anche a $(P_0 - C) = (6/7, 2/7, \pm 3/7)$. Inoltre passano per P_0. Le tangenti sono quindi: $\{x = -1/7 + 9t\ ;\ y = 2/7 + 3t\ ;\ z = \pm 3/7 \mp 20t\}$.

c. Le rette del piano $x = 3y - 1$ che passano per $(2, 1, 1)$ possono essere scritte come $\begin{cases} x &= 3y - 1 \\ z - 1 &= m(y - 1) \end{cases}$ (ne manca solo una). Per vedere quali di esse sono tangenti basta calcolarne la distanza dal centro $(-1, 0, 0)$ e imporla uguale a 1.

Per calcolare tale distanza occorre determinare la proiezione di $(-1, 0, 0)$ sulla retta che è $\left(\dfrac{2m^2 - 3m - 10}{10 + m^2}, \dfrac{m^2 - m}{10 + m^2}, \dfrac{10 - 10m}{10 + m^2}\right)$ da cui $m = 0\,,\ 20/9$. Oppure si possono intersecare le rette con la circonferenza e imporre la coincidenza delle soluzioni ($\Delta = 0$), ricavando gli stessi valori per m.

583. a. Si tratta di trovare a, b in modo che la retta di equazione $\{x = at; y = bt; z = at\}$ abbia distanza $d = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ dal centro $(0, 0, 1)$ della sfera. Per calcolare d si può trovare la proiezione ortogonale di C sulla retta che è $\left(a^2/(2a^2 + b^2)\ ,\ ab/(2a^2 + b^2)\ ,\ a^2/(2a^2 + b^2)\right)$. Imponendo che la distanza tra $(0, 0, 1)$ e tale punto sia $\sqrt{3}/2$ si trova $4a^4 = b^4$ cioè $2a^2 = b^2$ o $b = \pm\sqrt{2}a$, p.es. $b = \pm\sqrt{2}$; $a = 1$. Le due rette sono: $\{x = t; y = \pm\sqrt{2}t; z = t\}$

b. Basta intersecare la sfera col piano passante per P, Q e per il centro della sfera che è il piano $x = y$. Il cerchio è : $\{x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0; x = y\}$.

c. Si considerano i piani passanti per la retta $PQ\{x = y; z = \sqrt{2}y\}$ e cioè i piani del tipo $\lambda(x - y) + \mu(z - \sqrt{2}y)$ e che hanno distanza $\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = 1/2$ dal centro della sfera. Si trova $\mu^2 - 2\sqrt{2}\lambda\mu - 2\lambda^2 = 0$ da cui p.es. $\lambda = 1$ e $\mu = \sqrt{2} \pm 2$.
I piani sono $x + (\mp 2\sqrt{2} - 3)y + (\sqrt{2} \pm 2)z = 0$. Le circonferenze sono le intersezioni dei due piani con la sfera.

d. La retta è tangente perché intersecandola con la sfera si trovano due punti coincidenti: $(0, 0, 2)$. Le circonferenze stanno sui piani che passano per la retta e hanno distanza $\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = 1/2$ da $(0, 0, 1)$. I piani sono quelli di equazione:
$3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y \pm \sqrt{10}(z - 2) = 0$. Le circonferenze sono perciò le intersezioni tra questi piani e la sfera.

584. Il punto di minima distanza da $(0, 0, 0)$ è il punto della retta congiungente $(0, 0, 0)$ con $(1, 1, 2)$ che ha distanza 2 da $(1, 1, 2)$ (ce ne sono ovviamente due tra i quali è facile scegliere quello cercato). Il punto è $P(1 - \sqrt{6}/3, 1 - \sqrt{6}/3, 2 - 2\sqrt{6}/3)$. Il piano tangente alla sfera in P è $\alpha : x + y + 2z = 6 - 2\sqrt{6}$.

a. Basta intersecare α con il piano passante per P e ortogonale all'asse y. Si trova quindi:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 - 2\sqrt{6} \\ y = 1 - \sqrt{6}/3 \end{cases}$$

b. Basta intersecare α con l'asse y. Si trova il punto $Q(0, 6 - 2\sqrt{6}, 0)$. La retta cercata è perciò PQ:
$$\begin{cases} x = (1 - \sqrt{6}/3)t \\ y = (6 - 2\sqrt{6}) + (-5 + 5\sqrt{6}/3)t \\ z = (2 - 2\sqrt{6}/3)t \end{cases}$$

585. Il piano α delle circonferenze è quello contenente r, A e $B : x + z = 1$. Le circonferenze hanno centro sull'asse a del segmento AB. La retta a passa per il punto medio tra A e B ed è ortogonale a $(B - A)$ e a $\vec{n}_\alpha$ ed è perciò $\{x = 1/2 + t; y = 1/2 + 2t; z = 1/2 - t\}$. I centri sono i punti di a che sono equidistanti da A e dalla retta r. Dato che la proiezione su r del punto $(1/2 + t, 1/2 + 2t, 1/2 - t)$ è $(1/2 + t, 2, 1/2 - t)$, allora le due distanze sono rispettivamente $|\ 2t - 3/2\ |$ e $\sqrt{(t - 1/2)^2 + (1/2 + 2t)^2 + (t - 1/2)^2}$; uguagliandole si trova $t = -3/2 \pm \sqrt{3}$. I centri sono i punti $(-1 \pm \sqrt{3}, -5/2 \pm 2\sqrt{3}, 2 \mp \sqrt{3})$; i raggi $2\sqrt{3} \mp 9/2$. Da questi dati si scrivono facilmente le equazioni delle due circonferenze.

586. Sono i punti P della retta r che hanno distanza $\sqrt{3}$ dal piano e cioè $(1/2, 2, 1/2)$ e $(-5/2, -4, 7/2)$.