Classificazione degli esercizi: F : Fondamentale C : Consigliato A : Approfondimento T : Teorico

1. SISTEMI E MATRICI: Algoritmo di Gauss

F 101. Usando l'algoritmo di Gauss dire se hanno soluzioni reali e, in caso affermativo, risolvere i seguenti sistemi (il numero delle incognite è scritto a lato della graffa):
• Nei sistemi c. e f. , scrivere le soluzioni in tutti i modi possibili, cioè con tutte le possibili scelte delle incognite non pivotali.

a. $_3\begin{cases} x+y-z = 1 \\ x-y+2z = 0 \\ -3x+y-3z=-1 \end{cases}$ b. $_4\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-3y+z=0 \\ -x+y+t=1 \end{cases}$ c. $_4\begin{cases} y-z+2t=1 \\ 2y-2z=0 \\ -y+z+2z=1 \end{cases}$

d. $_3\begin{cases} 5y-z=-1 \\ x-3y=1 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$ e. $_5\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=0 \\ z+t=6 \\ t+u=7 \end{cases}$ f. $_4\begin{cases} z+2t=1 \\ x+2y+t=2 \\ 2x+4y-z=3 \end{cases}$

F 102. Mediante l'algoritmo gaussiano, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

a. $_3\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+2y-2z=k \end{cases}$ b. $_3\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-3y=0 \\ 2x-y+z=k^2 \end{cases}$ c. $_3\begin{cases} x+2y+z=1 \\ y-z=1 \\ x+k^2y+2z=k+k^2 \end{cases}$

F 103. Per ognuno dei tre sistemi lineari a lato nelle incognite x, y, z, t dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$, assegnati mediante la loro matrice completa:

- Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema è ridotto e in caso contrario determinare un sistema ridotto equivalente al dato.
- Dire, per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.
- Determinare, quando possibile, tutte le soluzioni.

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} k^2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & k^2-1 & 0 \end{array}\right)$

b. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+3 & k+3 & 1 \\ k & 1 & 2 & k^2 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array}\right)$

c. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k-1 & k^2-4 & k & 1 \end{array}\right)$

F 104. Mediante la riduzione gaussiana, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

a. $_2\begin{cases} kx-y=1 \\ x-4ky=2 \end{cases}$ b. $_3\begin{cases} kx+y-z=1 \\ kx-y+kz=-1 \end{cases}$ c. $_2\begin{cases} kx+2ky=k \\ kx+y=1-k \end{cases}$

C 105. Altri sistemi da studiare mediante la riduzione gaussiana o altre serie di operazioni elementari:

a. $_2\begin{cases} kx+y=-1 \\ (1+k)x+y=k \\ (3-k)x=2k-1 \end{cases}$ b. $_3\begin{cases} kx+y=1 \\ 2x+(k+1)y+z=1 \\ kx+3y+z=4 \end{cases}$ c. $_3\begin{cases} kx-y+(k+1)z=0 \\ -x+ky=1 \\ (k-1)y+2z=1 \\ x-y+(k-1)z=-k \end{cases}$

C 106. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni diverse dalla banale e quante soluzioni hanno i sistemi omogenei seguenti:

a. $_3\begin{cases} kx+y=0 \\ x+z=0 \\ x+ky-2z=0 \end{cases}$ b. $_4\begin{cases} kx+y+z+t=0 \\ x-y+t=0 \\ 2x+z+t=0 \\ kx+3y+2z=0 \end{cases}$ c. $_7\begin{cases} x-ky+z+t-2u+v+w=0 \\ kx-y+z+t-2u+v+w=0 \end{cases}$

A 107. Per ogni coppia $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ dire quante soluzioni ha il sistema a lato, dipendente da $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} ab & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 \\ 0 & b+1 & a(b-1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Determinare un $a \in \mathbb{R}$ per il quale il sistema ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$ e un $a \in \mathbb{R}$ per il quale il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

1. SISTEMI E MATRICI: Matrici

F 111. Completare la tabella seguente dicendo quali prodotti tra le matrici seguenti sono possibili. In caso affermativo eseguirli.

1^0 fattore \ 2^0 fattore	A	B	C	D	E	F
A	no	no				
B	sì	sì				
C						
D						
E						
F						

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F = (0\ 1\ -1)$$

F 112. Siano A, B, C matrici quadrate dello stesso ordine. Dire quali di queste affermazioni sono vere (e perché) e quali false (mostrando un controesempio).

a. $A \cdot B = B \cdot A$
b. Se $A \cdot B = 0$, allora ($A = 0$ oppure $B = 0$)
c. Se $A \cdot B = B$, allora $A = I$
d. $A + B + C = C + B + A$
e. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
f. Se $A \cdot B = A \cdot C$, allora $B = C$
g. Se $A + B = A + C$, allora $B = C$
h. $(A + B)^T = A^T + B^T$
i. $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$
j. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
k. $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$
l. Se $A = A^2$, allora $A = 0$ oppure $A = I$
m. Se $A^2 = 0$, allora $A = 0$
n. Se $A^2 = I$, allora A è invertibile
o. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
p. $A^2 - I = (A + I)(A - I)$

F 113. Come l'esercizio precedente supponendo inoltre che esistano A^{-1} e B^{-1}:

a. $A \cdot B$ è invertibile
b. $A + B$ è invertibile
c. Se $A \cdot B = A \cdot C$, allora $B = C$
d. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
e. $A^{-1} \cdot B \cdot A = B$
f. $(A^{-1}BA)^5 = A^{-5}B^5A^5$
g. $(A^{-1}BA)^5 = A^{-1}B^5A$
h. $A \cdot B^{-1} \neq 0$
i. Se $AB = C$, allora $B = CA^{-1}$
j. Se $A^2 = I$, allora $A = \pm I$

F 114. Siano A, B matrici reali 4×4. Dire in quali casi è possibile dare condizioni su A e B affinché le equazioni matriciali seguenti abbiano sicuramente soluzione X e, in questo caso scrivere esplicitamente la soluzione.

a. $AX = B$
b. $AX + X = B$
c. $AX + BX = C$
d. $AXA + AXB + B = I$
e. $AX + XB = I$
f. $AXB + X = B$

A 115. In $M_{22}(\mathbb{R})$: determinare tutte le matrici A tali che $A^2 = 0$.

A 116. In $M_{22}(\mathbb{R})$: trovare una matrice $A \neq I, 0$ tale che $A^2 = A$ (Suggerimento: cercare A diagonale).

T 117. Siano $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Dimostrare che:

a. Se $A \cdot B = 0$ e $B \neq 0$ allora A non è invertibile.
b. Se A non è invertibile, esiste una matrice B non nulla tale che $A \cdot B = 0$.

F 118. Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F 119. Siano A, B matrici reali $n \times n$, A invertibile. Dire quali di queste affermazioni sono vere (e perché) e quali false (mostrando un controesempio).

a. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
b. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
c. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
d. $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A) = \det(B)$
e. $\det(A^2) = (\det(A))^2$
f. $\det(-A) = -\det(A)$

F 120. Calcolare il determinante di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1&2&1&0\\0&0&2&0&5&0\\0&0&7&0&0&0\\4&1&3&2&2&5\\0&1&4&0&1&0\\0&1&1&4&3&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3&0&0&0\\3&4&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&3\\0&0&0&4&5&6\\0&0&0&3&2&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2&3&7&8&9\\1&0&9&9&9&5\\0&0&1&2&9&8\\0&0&1&3&9&7\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&12&12&13&96\\1&12&12&13&87\\3&-3&9&0&81\\7&8&-2&9&65\\1&-1&3&1&9\end{pmatrix}$$

1. SISTEMI E MATRICI: Sistemi lineari e caratteristica

F 131. Discutere il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti, assegnati mediante la loro matrice completa, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Si consiglia di usare, quando è conveniente, anche metodi diversi dall'algoritmo di Gauss.

a. $\left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1\\ 2 & 1+k & 2\\ 2-k^2 & 1 & k+2\end{array}\right)$ b. $\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 4 & -(1+k) & 1\\ k^2 & k+1 & -k & 1\\ -k & 1-3k & k^2 & 1\end{array}\right)$ c. $\left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ k-1 & k & 2 & 2k\\ 4 & 0 & k-2 & 0\end{array}\right)$

C 132. Determinare, usando fin quando possibile la strategia della pivotizzazione parziale, per quali $k \in \mathbb{R}$ ha soluzioni e quante il sistema lineare 4×4 nelle incognite x, y, z, t.

$$\begin{pmatrix}3&0&1&1\\0&4&1&1\\1&1&k&1\\2&0&1&k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\k\end{pmatrix}$$

C 133. Discutere, usando ogni volta il metodo che si ritiene più opportuno, il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

a. $\begin{cases} x+y+kz=2k-1\\ x+ky+z=k\\ kx+y+z=1\end{cases}_3$ b. $\begin{cases}(k^2-k+1)x-2y=1\\ x-2y+(k^2-k)z=k\end{cases}_3$ c. $\begin{cases}2x+ky=1\\ y=k\\ 2x+(k-1)y=-1\\ kx+3y=k+1\end{cases}_2$

d. $\begin{cases}kx-y+z=-k\\ -x+ky-z=1\\ (k-2)x+(2k-1)y-z=k^2\end{cases}_3$ e. $\begin{cases}y+z+t=1\\ kx+z+kt=2\\ x-y+2kz=0\\ x+2z+t=1\end{cases}_4$ f. $\begin{cases}kx+(2k+1)y+kz=1\\ x+y-z=0\\ (k+1)y+2kz=k\\ kx+ky-kz=k\end{cases}_3$

A 134. Discutere, usando opportunamente i metodi noti, il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ e schematizzare la situazione in un piano cartesiano di coordinate a, b.

a. $\begin{cases}x+2y-2z=1\\ x-y-z=b\\ -4x+ay+4z=2\end{cases}_3$ b. $\begin{cases}x+ay=1\\ -x+2y=0\\ 2x+by=1\end{cases}_2$ c. $\begin{cases}ax+by-z=1\\ -x+by=1\\ 2x+by-2z=1\end{cases}_3$

d. $\begin{cases}ax+y+z=a\\ x+2y+z=0\\ bx+az=a\\ (a-1)x-y=a\end{cases}_3$ e. $\begin{cases}ax+y+bz=b\\ ax+y+z=2\\ by+z=0\end{cases}_3$

F 141. Discutere la caratteristica delle due matrici al variare di $k \in \mathbb{R}$ e dire per quali k la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre tre e per quali k la combinazione è unica.

$$A=\begin{pmatrix}k&2&3&1\\0&k&1&1\\k&0&k&-k\\-k&2&1&3k\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&k+2&0&1\\-1&0&1&k+1\\k+1&2&-1&0\\-1&2&k+1&2\end{pmatrix}$$

F 142. Per ciascuna delle 5 colonne C_i della matrice A dire se C_i è combinazione lineare delle rimenenti (se sì dire qual è, se no dire perché no).

$$A=\begin{pmatrix}1&0&4&3&0\\1&-1&1&1&1\\1&-2&-2&-1&1\end{pmatrix}$$

2. COMPLESSI: Numeri complessi

F 201. Nel piano di Argand-Gauss disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.

a. $\{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\,(z) \geq 2 \text{ e } \mid z \mid < 4\}$ b. $\{z \in \mathbb{C} : \mid z - (1+i) \mid < 3\}$
c. $\{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}\,(z) \geq \mathrm{Re}\,(z) \text{ e } \mid z - i \mid = 2\}$ d. $\{z \in \mathbb{C} :\ z^3 \in \mathbb{R}\}$

C 202. Altri sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ da disegnare nel piano di Argand-Gauss.

a. $\{z \in \mathbb{C} :\ iz^3 \in \mathbb{R}\}$ b. $\{z \in \mathbb{C} :\ i + \overline{z} \in \mathbb{R}\}$
c. $\{z \in \mathbb{C} :\ (1+\overline{z})/ \mid z \mid = 1\}$ d. $\{z \in \mathbb{C} : \mid z + 2\overline{z} \mid < 9\}$
e. $\{z \in \mathbb{C} : \mid z + 2 - i \mid < \mid z - 1 + 3i \mid\}$ f. $\{z \in \mathbb{C} :\ z \neq 0 \text{ e } \mathrm{Arg}(z^4) = \mathrm{Arg}(-z)\}$
g. $\{z \in \mathbb{C} :\ z^6 = ib \text{ per un } b \in \mathbb{R}\ ,\ b < 0\}$
h. $\{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid \leq 4 \text{ e } \mathrm{Re}\,(z) \geq 0 \text{ e } \mathrm{Arg}(z^6) = \mathrm{Arg}(iz^2)\}$

F 203. Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e un argomento dei seguenti numeri complessi e disegnarli nel piano di Gauss.

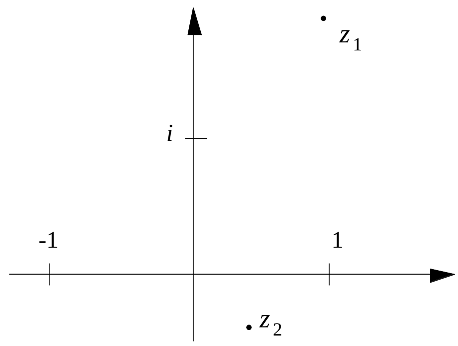
a. $-1 + \sqrt{3}i$ b. $\dfrac{1+i}{-3+2i}$ c. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
d. $\dfrac{(1+i)^5}{(1+\sqrt{3}i)^6}$ e. $\dfrac{i}{(1+2i)^2}$ f. $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{40}$

C 204. Altri numeri complessi da disegnare nel piano di Gauss, dopo aver determinato parte reale, parte immaginaria, modulo e un argomento.

a. $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{605}}{2^{600}(1-i)^7 i^{33}}$ b. $(1-\sqrt{3}i)^9 - (1+i)^6$ c. $e^{1726\pi i/3}$
d. e^{1+i} e. $\sin(\pi/5) - i\cos(\pi/5)$

F 205. In $\mathbb{C}$, sono dati graficamente, cioè mediante disegno nel piano di Argand-Gauss, il numero z_1 di modulo 2 e il numero z_2 di modulo 1/2.

a. Disegnare, mediante operazioni grafiche, i numeri $\overline{z}_1, -z_1, z_1^{-1}$ e le soluzioni dell'equazione $x^6 = z_1$.
b. Disegnare, mediante operazioni grafiche, i numeri $\overline{z}_2, -z_2, z_2^{-1}$ e le soluzioni dell'equazione $x^6 = z_2$.
c. Disegnare infine anche il prodotto $z_1 \cdot z_2$.



T 206. Sia $z \in \mathbb{C}\ ,\ z \neq 0$

a. Siano z_1 e z_2 le radici quadrate di z. Provare che $z_1 \cdot \overline{z}_2$ è sempre un numero reale.
b. Siano z_3, z_4 le altre due radici cubiche di z^3 (oltre z). Provare che si ha : $z_3 \cdot z_4 = z^2$

A 207. a. Sia $z_0 = (\sqrt{3}+i)/2$. Determinare il minimo $n \in \mathbb{N}$ per cui z_0 sia radice dell'equazione $z^n = 1$.
b. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^{10} = a$ ha almeno una soluzione puramente immaginaria.

F 208. Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.

a. $z^3 = i$ b. $z^3 = -1 + i$ c. $z^3 = -1 + 2i$
d. $(z+i)^3 = i$ e. $z^3 = (1+i)^3$ f. $z^4 = iz^2$
g. $z^5 = z$ h. $z^2 = 8i$ i. $iz^2 + 2z - (2+i) = 0$
j. $e^z = 1$ k. $e^z = -1$

C 209. Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.

a. $iz^2 - 2z + \sqrt{3} = 0$ b. $iz^3 = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{1+i}$ c. $e^z = 0$

d. $e^z = (\sqrt{2}/2)(1+i)$ e. $e^z = 1 + i$ f. $e^{z^2} = 1$

g. $e^{z^2+2z+1} = 1$ h. $\sin(z) = 0$ i. $\cos(z) = 2$

2. COMPLESSI: Polinomi

F 211. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 2 avente 4 e 5/7 come radici.

F 212. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che : $P(1) = P(2) = 0$, $P(0) = 1$ e $\deg(P) = 2$.

T 213. Dimostrare che se P e Q sono due polinomi e $\deg(P) = n$ e $\deg(Q) = m$, allora:
$\deg(P+Q) \leq \max(m,n)$ $\deg(P \cdot Q) = n + m$.

T 214. Sia $z \in \mathbb{C}$ e siano $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ le sue radici n-esime ($n \geq 2$). Provare che:
$z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0$

F 215. Verificare che 1 è radice di $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ e trovare le altre due radici.

F 216. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado minimo avente come radici $1+i$ e i e tale che $P(1) = 3$.

F 217. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado minimo avente come radici $1+i$ e i e tale che $P(1) = 3$.

C 218. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 3 avente $1+i$ come radice e scomporlo in fattori di grado minimo a coefficienti reali.

C 219. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 3 tale che $P(1+i) = 0$, $P(i) = 1$. Perché non ne esiste uno di grado 2 ?

A 220. Scomporre in fattori a coefficienti reali di grado minimo i polinomi seguenti:

a. $P_1(x) = x^4 + 1$ b. $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$

c. $P_3(x) = x^5 - 1$ d. $P_4(x) = x^6 - x^2$

A 221. Dire quanti fattori a coefficienti reali ha il polinomio $x^{27} - 3$.

T 222. Sia $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Dimostrare che se tutte le radici di $P(x)$ hanno molteplicità due, allora $P(x)$ è il quadrato di un altro polinomio di $\mathbb{C}[x]$. Dire quale ulteriore ipotesi occorre per provare la stessa cosa in $\mathbb{R}[x]$.

C 223. a. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti non tutti reali avere una radice reale ?

b. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti non tutti reali avere radici tutte reali ?

c. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ avere due radici coniugate con diversa molteplicità ?

d. Può un numero complesso non reale avere una radice n-esima reale ?

F 224. Constatato che 1 è radice di $x^{11} - 5x^{10} + 10x^9 - 10x^8 + 5x^7 - x^6 + x^5 - 4x^4 + +6x^3 - 4x^2 + x$, determinarne la molteplicità.

C 225. Sia $P(x) = x^{31} - 2x^5 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$. Determinare $a, b \in \mathbb{C}$ tali che i sia radice di $P(x)$ almeno con molteplicità 2.

3. SPAZI VETTORIALI: Lineare indipendenza e generatori

F 301. Negli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{C}^3$ (rispettivamente $\mathbb{R}$-spazio e $\mathbb{C}$-spazio), dimostrare che sono linearmente dipendenti le seguenti terne di vettori e scrivere per ogni terna due combinazioni lineari nulle a coefficienti non tutti nulli dei tre vettori:

a. $(1,1,0)\,,\,(0,1,1)\,,\,(1,2,1)$ b. $(1,2,3)\,,\,(4,5,6)\,,\,(7,8,9)$ in $\mathbb{R}^3$

c. $(1,4,5)\,,\,(2,3,-1)\,,\,(0,0,0)$ d. $(1,\pi,0)\,,\,(10^{45},\pi,2)\,,\,(\pi,\pi^2,0)$ in $\mathbb{R}^3$

e. $(1,i,0)\,,\,(i,-1,0)\,,\,(0,0,i)$ f. $(1,i,1)\,,\,(i,1,-1)\,,\,(1,1,0)$ in $\mathbb{C}^3$

F 302. a. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, esprimere se possibile $(1,2,0)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,0,0)\,,\,(0,1,0)\,,\,(1,1,0)$ in due modi diversi.

b. Sempre nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, esprimere se possibile $(1,1,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)\,,\,(0,1,1)\,,\,(1,0,1)$ in due modi diversi.

F 303. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Dati i vettori $(1,2,1)\,,\,(1,0,1)\,,\,(1,1,1)\,,\,(0,1,2)$, dire quali dei quattro sono combinazione lineare dei rimanenti.

F 304. Provare che sono linearmente indipendenti le seguenti successioni di vettori e completarle a base dello spazio vettoriale indicato.

a. $(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$-sp.) b. $(1,1,1),(2,1,0),(5,0,0)$ in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$-sp.)

c. $(0,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$-sp.) d. $(0,1,1)\,,\,(0,7,i)$ in $\mathbb{C}^3$ ($\mathbb{C}$-sp.)

e. $(i,0)\,,\,(0,i)$ in $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}$-sp.) f. $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$-sp.)

F 305. Siano u,v vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Esprimere in due modi distinti u come combinazione lineare di $u+v\,,\,u-v\,,\,v$. Quanti modi esistono ?

F 306. a. Dire perché i vettori $v_1=(1,0,1)$ $v_2=(1,1,2)$ $v_3=(1,2,3)$ $v_4=(-1,2,1)$ in $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti e scrivere tutte le relazioni di lineare dipendenza tra essi.

b. Dire in che modo è possibile operare degli scarti tra i quattro vettori in modo che i restanti siano linearmente indipendenti.

T 307. Siano u,v,w vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Provare che:

a. Se u,v,w sono vettori linearmente dipendenti e u,v sono linearmente indipendenti, allora w è combinazione lineare di u e v.

b. Mostrare con un controesempio che, se u,v,w sono vettori linearmente dipendenti e anche u,v sono linearmente dipendenti, non è detto che w sia combinazione lineare di u e v.

c. Se u,v,w sono linearmente indipendenti anche $u-v\,,\,u+v\,,\,v+w$ lo sono.

d. Se u,v,w sono linearmente dipendenti anche $u-v\,,\,u+v\,,\,v+w$ lo sono.

e. Se u,v,w generano V anche $u-v\,,\,u+v\,,\,v+w$ lo generano.

T 308. Siano u e v vettori linearmente indipendenti in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Per quali $a,b,c,d\in\mathbb{K}$ i vettori $au+bv\,,\,cu+dv$ sono linearmente indipendenti ?

3. SPAZI VETTORIALI: Sottospazi e dimensione

F 310. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sotto-spazi vettoriali e in caso positivo determinarne una base.

a. $V=\{(x,y):xy=0\}$ in $\mathbb{R}^2$

b. $V=\{(x,y,z):x\in\mathbb{Q}\}$ in $\mathbb{R}^3$

c. $V=\{(x,y,z):x+2y+z=1\}$ in $\mathbb{R}^3$

d. $V=L\{(1,1,0),(0,0,0),(0,2,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$

e. $V=\{(1,1,0),(0,2,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$

f. $V=\{(x,y,z,t):x=3y=3z-t\}$ in $\mathbb{R}^4$

g. $V=\{(a-b\,,\,a+2b\,,\,3b):a,b\in\mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^3$

h. $V=\{(x,y):x=iy\}$ in $\mathbb{C}^2$

i. $V = \{(x, y, z) : x^2 = y\}$ in $\mathbb{R}^3$
j. $V = \{A : \det(A) = 0\}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$

A 311. Ricordiamo che nell' $\mathbb{R}$-spazio $M_{nn}(\mathbb{R})$ si ha:

a. A è simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j.
b. A è antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
c. A è diagonale se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.
d. A è triangolare superiore (inferiore) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ $(i < j)$.

Nell' $\mathbb{R}$-spazio $M_{nn}(\mathbb{C})$ si ha:

e. A è hermitiana se $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (coniugato) per ogni i, j.

Provare che le matrici simmetriche etc. costituiscono sottospazi. Per $n = 2$ e per $n = 3$ determinare basi dei sottospazi.

F 312. Determinare due diverse basi per il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $(1, 1, 0), (1, 3, 2), (0, 1, 1)$.

F 313. Dire perché è possibile completare i vettori $(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1)$ a base di $\mathbb{R}^4$ e farlo in almeno due modi differenti usando vettori della base canonica.

C 314. Determinare una base e un sistema di generatori che non sia base per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

a. $V_1 = \{(x, y, z) : x + y = 2x - 3z = 0\}$ b. $V_2 = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$

F 315. In $\mathbb{R}^4$ è dato il sottospazio $W = L\{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Scrivere tutti i suoi vettori e dire se ce n'è uno appartenente anche al sottospazio $V_1 = \{(x, y, z, t) : x + 2y - z + 2t = 0\}$

C 316. In $\mathbb{R}^4$. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, -2), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 0, 0)\}$. Dire che dimensione ha V e quante basi per V si possono estrarre dal sistema di generatori dato.

F 317. In $\mathbb{R}^3$. Sia Dire perché $\mathcal{B} : (1, 1, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 2)$ è una base e scrivere $v_{\mathcal{B}}$ dove $v = (1, 2, 1)$. Esiste un vettore v tale che $v_{\mathcal{B}} = [1\ 2\ 3]^T$?

F 318. In $\mathbb{R}^3$ sia W il sottospazio una cui base è $\mathcal{B} : (1, 2, 0), (0, 1, -1)$.

a. Scrivere un'altra base $\mathcal{B}_1$ costituita da vettori non proporzionali a quelli della base $\mathcal{B}$.
b. Dire quale tra i vettori $v = (1, 0, 2)$, $w = (0, 1, 2)$ appartiene a W e per questo vettore determinare la matrice delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e quella rispetto a $\mathcal{B}_1$.
c. Scrivere una base $\mathcal{B}_2$ di W rispetto a cui il vettore trovato in b. abbia coordinate $[1\ 0]^T$

F 319. Sia $W = L\{(1, 2, 2, 0), (0, 2, 3, -1), (3, 2, 0, 2), (1, 1, 1, 1)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

a. Determinare $\dim(W)$, una base $\mathcal{B}$ per W e scrivere tutti i vettori di W.
b. Dire quali tra i seguenti due vettori stanno in W: $w_1 = (1, 0, -1, 1)$, $w_2 = (2, 1, 1, 1)$
c. Trovare (se esiste) un vettore $w \in W$ con le prime due componenti nulle.
d. Calcolare la matrice delle coordinate di w rispetto a $\mathcal{B}$.
e. Scrivere un'altra base $\mathcal{B}_1$ di W il cui primo vettore sia w.

F 320. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 0, 2, -1)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Dire quali tra i seguenti due vettori stanno in V: $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, -1)$.

C 321. In $\mathbb{R}^3$. Trovare una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $v(1, 2, 1)$ abbia coordinate $[1\ 1\ 1]^T$ e $w = (0, 1, 1)$ abbia coordinate $[0\ 1\ 1]^T$.

A 322. In $\mathbb{R}^4$. Provare che $V \subset W$ nei casi a. b. c. e che $V \not\subset W$ nel caso d.

a. $V = L\{(0, 1, 1, 2), (0, 2, 0, 2)\}$ $W = \{(x, y, z, t) : x + y + z = t\}$
b. $V = L\{(3, 0, 2, 1), (2, 2, 3, 1)\}$ $W = L\{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$
c. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - 2t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$
d. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$

C 323. In $M_{22}(\mathbb{R})$. Sia $V = \{A : A \cdot B = B \cdot A\}$ (B matrice fissata).

a. Provare che V è sempre sottospazio.
b. Trovarne una base nel caso in cui B sia la matrice a lato.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

A 324. Come il problema precedente, ma con $V = \{A : A \cdot B \text{ sia diagonale}\}$.

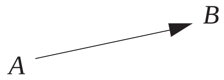
3. SPAZI VETTORIALI: Vettori geometrici

F 331. Dire quali di queste affermazioni sono vere:

a. AB è un segmento orientato

b. AB è un vettore (libero)

c. AB rappresenta un vettore libero



F 332. Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vettori geometrici. Dire quali di queste operazioni hanno senso e in caso positivo dire se il risultato è un vettore o uno scalare.

a. $|\vec{w}|\ \vec{v}$ b. $|\vec{v}||\vec{w}|$ c. $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{w}|}$ d. $\dfrac{|\vec{v}|}{\vec{w}}$ e. $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$

f. $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{w}$ g. $(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})$ h. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$ i. $\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$ j. $\vec{v}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$

k. $\vec{u}\cdot\vec{v}\wedge\vec{w}$ l. $\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{w}$ m. $(\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})$

F 333. Calcolare $((1,2,0)\wedge(3,2,0))\wedge(1,1,1)$ e $(1,2,0)\wedge((3,2,0)\wedge(1,1,1))$

C 334. Sia $|\vec{v}|=1$. Esiste un vettore $\vec{w}$ di modulo 2 tale che $\vec{v}\cdot\vec{w}=5$?
Ed esiste $\vec{w}$ di modulo 2 tale che $\vec{v}\cdot\vec{w}=-1$?

T 335. Provare che se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ e $|\vec{u}|=|\vec{v}|=2$, allora $|(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v}|=8$.

T 336. Dimostrare che se $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$ e $a\in\mathbb{R}$,allora:

a. $(\vec{u}+a\vec{v})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ b. $\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}\wedge\vec{w}=0$

T 337. Siano $\vec{w}_1,\vec{w}_2\neq\vec{0}$ vettori e supponiamo che $\vec{u}\neq\vec{0}$ formi lo stesso angolo sia con $\vec{w}_1$ che con $\vec{w}_2$ e che $\vec{v}\neq\vec{0}$ abbia la stessa proprietà. Dimostrare che se $a\vec{u}+b\vec{v}$ è non nullo allora esso ha ancora la stessa proprietà.

Supponiamo d'ora in poi che nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_3 sia fissata una base ortonormale destrorsa $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$. Indicheremo quindi i vettori con le loro coordinate rispetto a tale base. Per esempio con $(1,2,-1)$ indicheremo il vettore $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$.
Salvo diverso avviso i seguenti problemi sono nello spazio V_3.
In alcuni problemi lo spazio è V_2 con una base ortonormale $\vec{\imath},\vec{\jmath}$.

F 341. Provare che esistono due vettori di modulo 5 paralleli a $(1,2,-1)$ e determinarli.

F 342. Determinare un vettore di modulo 1 ortogonale a $(1,2,3)$ e a $(1,1,-1)$.

F 343. Dati i due vettori $\vec{v}_1=(1,1,0)$ e $\vec{v}_2=(2,-1,2)$ e il sottospazio $W=L\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ da essi generato.

a. Determinare un vettore $\vec{v}\in W$ *di modulo* 1, ortogonale a $\vec{\jmath}$.

b. Determinare il vettore $\vec{w}\in W$ *di modulo* 1, avente anche le seguenti due proprietà

$\vec{w}$ sia ortogonale a $\vec{v}_1$ $\vec{w}$ formi un angolo acuto con $\vec{v}_2$

c. Calcolare la matrice delle coordinate di $\vec{v}$ e di $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B}:\vec{v}_1,\vec{v}_2$ di W.

F 344. In V_3 sono assegnati i due vettori $\vec{v}=(1,1,0)$ e $\vec{w}=(0,-1,2)$.

a. Determinare una base *ortonormale* $\mathcal{B}$ per $W=L\{\vec{v},\vec{w}\}$.

b. In W, determinare le coordinate di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

c. Completare i due vettori di $\mathcal{B}$ a base ortonormale $\mathcal{B}_1$ per V_3.

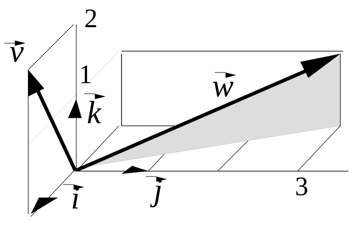
F 345. In V_3 sono dati i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rappresentati dai segmenti orientati disegnati.
Sia poi $W=L\{\vec{v},\vec{w}\}$ il sottospazio vettoriale da essi generato.

a. Calcolare l'angolo θ tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

b. Scrivere le coordinate di un vettore $\vec{u}\in W$ e ortogonale a $\vec{k}$.

c. Completare $\vec{u}$ a base ortogonale di W.

d. Completare $\vec{u}$ a base ortogonale di V_3.



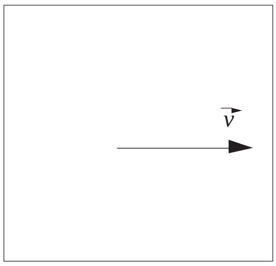
F 346. In V_3 sono dati i tre vettori di modulo 1:

$\vec{v}\,(-2,2,1)/3 \qquad \vec{w}\,(1,2,-2)/3 \qquad \vec{u}\,(1,-4,1)/\sqrt{18}$

a. Verificare che sono linearmente dipendenti.

b. Calcolare i loro angoli reciproci.

c. Usare i dati per effettuare uno schizzo della posizione dei tre vettori nello spazio di dimensione 2 da essi generato, rappresentato nel disegno dal quadrato.



C 347. Determinare i vettori $\vec{v} \neq \vec{0}$ tali che $\vec{v} - \vec{\imath}$ sia ortogonale a $(1,1,2)$ e $\vec{v}$ sia ortogonale a $\vec{\jmath}$.

F 348. Provare che esistono due vettori $\vec{v}$ paralleli a $(1,-1,1)$ tali che $\vec{v} - \vec{\imath}$ abbia modulo 3.

C 349. Dire se sono destrorse o sinistrorse le seguenti basi di V_3:

a. $\vec{\imath}\,,\ \vec{k}\,,\ \vec{\jmath}$ b. $\vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\,,\ \vec{\imath}$ c. $\vec{\jmath}+\vec{k}\,,\ \vec{\imath}+\vec{k}\,,\ \vec{\imath}+\vec{\jmath}$

C 350. a. Proiettare il vettore $(1,2,1)$ sul vettore $(0,3,1)$.

b. Trovare un vettore multiplo di $(1,2,1)$ la cui proiezione su $(0,3,1)$ abbia modulo 1. Ne esiste uno solo ?

A 351. Siano $\vec{u} = (1,2,0)$ e $\vec{v} = (0,1,-1)$. Determinare $\vec{w}$ tale che simultaneamente:

1. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ siano linearmente dipendenti.
2. $\vec{w}$ sia ortogonale a $\vec{v}$.
3. la proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{u}$ abbia modulo 1.

C 352. In V_2: Determinare tutti i vettori che formano un angolo di $\pi/3$ col vettore $(-1,2)$.

C 353. Determinare tutti i vettori formanti un angolo di $\pi/4$ con $(0,-1,1)$ e di $\pi/2$ con $(1,0,-2)$.

A 354. In V_2: Siano $\vec{v} = (1,-3)$ e $\vec{w} = (2,1)$:

a. Determinare $\vec{u}_1$ ortogonale a $\vec{v}$ tale che la proiezione di $\vec{u}_1$ su $\vec{w}$ coincida con la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$.

b. Determinare $\vec{u}_2$ di modulo 1 tale che la proiezione di $\vec{u}_2$ su $\vec{w}$ coincida con la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$.

T 355. Siano $\vec{u}$, $\vec{v}$ vettori non nulli. Determinare tutti i vettori linearmente dipendenti con $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e formanti con essi angoli uguali.

A 356. a. Dati i vettori $\vec{u}_1 = (1,2,0)$, $\vec{u}_2 = (0,-1,1)$, determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0)$ sul sottospazio $L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

b. Calcolare l'angolo θ tra il vettore $(1,0,0)$ e lo spazio $L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

4. APPLICAZIONI LINEARI E DIAGONALIZZAZIONE: Applicazioni lineari

F 401. Dire quali delle seguenti applicazioni tra $\mathbb{R}$-spazi vettoriali sono lineari

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y) = (x\ ,\ y\ ,\ \pi y)$

b. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (x\ ,\ y + 1\ ,\ \pi z - y)$

c. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ $\quad f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

d. $f : V_3 \to V_3$ $\quad f(\vec{x}) = \vec{x} \wedge \vec{w}$ con $\vec{w} = (1, 2, -3)$

e. $f : M_{33}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(X) = (\det(X)\ ,\ 0)$

f. $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ $\quad f(X) = A \cdot X \cdot A$ dove A è la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

g. $f : V_3 \to V_2$ $\quad f(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot (1, 2, 0)\ ,\ \vec{x} \cdot (2, 0, -1))$

È inteso che in V_2 e in V_3 le coordinate sono rispetto a una base ortonormale.

F 402. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(x, y, z) = (x + y - z \quad , \quad 2x - y \quad , \quad 3x - z \quad , \quad 3y - 2z)$.
Scrivere la matrice associata a f e determinare una base per il nucleo e una per l'immagine.

F 403. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita:
$f(x, y, z, t) = (x + y - z \quad , \quad y + 2z + t \quad , \quad x + 2y + z + t \quad , \quad x - 3z - t)$

a. Determinare due diverse basi per il nucleo e per l'immagine di f.

b. Determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = (0, 1, 1, -1)$

c. Determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = (1, 0, 0, -1)$

F 404. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice A al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

a. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ $\ker(f)$ è lo spazio $\{(0, 0, 0, 0)\}$.

b. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$, il vettore $f(1, 1, -2, 0)$ coincide col vettore $f(0, 0, 1, 1)$

c. Calcolare $\dim(\ker(f))$ e $\dim(\mathrm{Im}\,(f))$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

d. Dire per quali k il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(f)$.

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & k-2 & -2 \end{pmatrix}$$

C 405. Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice A.

a. Determinare $f(i, 1, 1)$

b. Determinare una base per $\ker(f)$ e una per $\mathrm{Im}\,(f)$.

c. Determinare tutti i $v \in \mathbb{C}^3$ tali che $f(v) = (1 + i, 1 - i)$.

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

F 406. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che soddisfa le quattro condizioni a lato e determinare una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ e una per $\ker(f)$.

$$\begin{aligned} f(1, 2, 3, 4) &= (0, 0, 0, 0) \\ f(1, -1, 1, 1) &= (1, 1, 1, 1) \\ f(0, 0, 2, 3) &= (2, 3, 4, -1) \\ f(0, 0, -5, 2) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

F 407. a. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfi le due condizioni $f(1, 2) = (0, 2, 2) \qquad f(1, 1) = (2, 1, 0)$.

b. Per questa f calcolare $f(1, 0)$ e $f(0, 1)$ e determinare una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

F 408. a. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfacente le quattro condizioni a lato.

b. Determinare $\dim(\ker(f)), \dim(\mathrm{Im}\,(f))$ e una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

c. Calcolare $f(x, y, z, t)$ per ogni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

d. Determinare una base per $\ker(f)$.

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1, 1) &= (0, 1, 2, 4) \\ f(0, 1, 1, 1) &= (0, 1, 1, 2) \\ f(0, 0, 1, 1) &= (0, 1, 0, 0) \\ f(0, 0, 0, 1) &= (1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

F 409. Definire due applicazioni lineari distinte $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $\mathrm{Im}\,(f) = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$ e $\ker(f) = L\{(1, 1, 1)\}$.

C 410. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $(1, 0, 0, 1)$ e $(0, 1, 2, 2)$. Definire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(f) = \mathrm{Im}\,(f) = V$.

F 411. Definire, se possibile, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 1, 1) = (1, 0, 2)$, $\ker(f) = L\{(0, 1, 2)\}$ e $(0, 1, 3) \in \mathrm{Im}\,(f)$.

C 412. Definire, se possibile, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 2, 0) = f(0, 0, -1)$. Inoltre $\ker(f)$ abbia dimensione 1 e $\ker(f)$ sia contenuto in $\mathrm{Im}\,(f)$.

C 413. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = \mathrm{Im}\,(f)$? E ne esiste una tale che $\mathrm{Im}\,(f) \subset \ker(f)$?

F 414. Definire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(1,1,1) = (1,2,0,-1)$, $\ker(f)$ sia lo spazio nullo e $\mathrm{Im}\,(f)$ non contenga nessuno dei vettori della base canonica.

C 415. Dire per quale $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1,1) = (3,1,1)$, $f(0,1) = (0,1,1)$ e $f(2,k) \in L\{(1,-1,0),(2,1,-1)\}$.

C 416. Dire perché non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che simultaneamente:
$f(1,0,1) = (3,0,1) \qquad f(0,1,0) = (0,0,1) \qquad f(0,1,1) = (0,1,0) \qquad (1,2,2) = (4,5,6)$

C 417. Dire perché esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfacente le tre condizioni a lato e dire perché non è unica. Definire poi una f che soddisfi le tre condizioni e tale che $\ker(f)$ abbia dimensione 1.
$f(1,1,2) = (2,2,1)$
$f(0,1,1) = (0,1,1)$
$f(1,0,1) = (2,1,0)$

4. APPLICAZIONI LINEARI E DIAGONALIZZAZIONE: Autovalori, autovettori

F 421. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Calcolare $f(1,2,1)$.
b. Determinare una base per il sottospazio $\ker(f)$.
c. Determinare una base per il sottospazio $\mathrm{Im}\,(f)$.
d. Dedurre dai calcoli precedenti tutti gli autovalori di f e la loro molteplicità.
e. Dire perché A è diagonalizzabile e determinare una matrice diagonale $D \in M_{33}(\mathbb{R})$ e una matrice invertibile $P \in M_{33}(\mathbb{R})$ tali che $AP = PD$.

F 422. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice simmetrica A.
Si tenga conto del fatto che è possibile rispondere alla domanda c. senza calcolare il polinomio caratteristico di f, ma solo usando le risposte alle domande a. e b.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Determinare una base per $\ker(f)$.
b. Calcolare $f(1,-1,0)$ e dedurne che $(1,-1,0)$ è autovettore.
c. Determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per f.

F 423. Usando i criteri noti, dire quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili, come matrici a elementi reali o a elementi complessi.

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

F 424. Dire se esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le tre condizioni e in caso positivo dire se è diagonalizzabile:

$$\boxed{f(0,1,-2) = (0,-1,2) \qquad f(3,3,0) = (1,1,0) \qquad f(0,1,1) = (0,0,0)}$$

F 425. Dire se esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le tre condizioni e in caso positivo dire se è diagonalizzabile:

$$\boxed{f(1,1,1) = (0,0,0) \qquad f(1,0,2) = (1,0,2) \qquad f(1,2,0) = (2,4,0)}$$

F 426. Dire se esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ che soddisfa le tre condizioni e in caso positivo dire se è diagonalizzabile:

$$\boxed{f(1,1,0) = (2,2,0) \qquad \ker(f) = L\{(1,0,2)\} \qquad f(1-i\ ,\ 1\ ,\ -i) = (1+i\ ,\ i\ ,\ 1)}$$

F 427. a. Definire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Im}\,(f) = L\{(1,1,1),(1,0,2)\} \qquad \ker(f) = L\{(1,0,2)\} \\ \text{2 sia autovalore e } (1,1,1) \text{ sia un'autovettore relativo} \end{array}}$$

b. Scrivere la matrice associata a f.
c. Dire se f è diagonalizzabile e *perché*.
d. Scrivere, se possibile, tre autovettori linearmente indipendenti per f.
e. Scrivere, se possibile, tre autovettori distinti per f.

C 428. Definire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soddisfacente simultaneamente le tre condizioni a lato e scrivere la matrice associata a f. Dire poi se f è diagonalizzabile.

$f(1,1,1) = (0,1,1)$
$\mathrm{Im}\,(f) = L\{(0,1,1),(0,1,2)\}$
2 e 3 siano autovalori

C 429. a. Scrivere una qualunque applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i cui autovalori siano 1 e 3 e l'autospazio relativo a $\lambda = 3$ sia $V_3 = L\{(1,0,2),(0,1,-1)\}$.

b. Dire perché, indipendentemente da come è stata definita l'applicazione, f è necessariamente diagonalizzabile.

c. Scrivere la matrice associata a f.

C 431. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_3 è fissata una base ortonormale $\mathcal{B} : \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

a. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $f : V_3 \longrightarrow V_3$ soddisfacente le tre condizioni inquadrate e definirla:

$\vec{\imath} + \vec{\jmath} \in \ker(f) \qquad f(\vec{k}) = 4\vec{\imath}$
$\lambda = -2$ sia un autovalore e $\vec{\imath} - 2\vec{k}$ sia un suo autovettore

b. Dire se esistono due autovettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ di modulo 1 e tra loro ortogonali.

F 432. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni seguenti.

$f(1,1,0) = (1,1,4) \qquad f(1,-1,0) = (-1,1,0) \qquad f(1,1,2) = (5,5,10)$

a. Dire perché le tre condizioni definiscono un'unica f lineare.

b. Dire quali autovalori e quali autovettori di f si possono dedurre dalle condizioni date.

c. Calcolare $f(x,y,z)$ per ogni terna (x,y,z).

d. Scrivere la matrice A associata a f tramite la base canonica.

e. Senza calcolare il polinomio caratteristico, ma usando le informazioni acquisite finora, scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $AP = PD$.

A 433. Sia $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita come $f(X) = X \cdot B$, B la matrice sotto.

a. Verificare che f è lineare

b. Scrivere una base per $\ker(f)$ e una per $\mathrm{Im}\,(f)$.

c. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base "canonica" di $M_{22}(\mathbb{R})$.

d. Provare che f è diagonalizzabile e determinarne tutti gli autovettori.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

A 434. Sia $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ definita come $f(X) = X\cdot B - B\cdot X$ dove B è la matrice del problema precedente.
Provare che f è lineare e scrivere una base per $\ker(f)$ e una per $\mathrm{Im}\,(f)$.

A 435. Data l'applicazione lineare $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ definita come: $f(X) = EX$. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Identificare $M_{22}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$ in ciascuno dei due modi seguenti e in entrambi i casi scrivere la matrice associata a f.

1. mediante la base $\mathcal{B}$ (appiattimento per righe)

$$\mathcal{B} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. mediante la base $\mathcal{B}_1$ (appiattimento per colonne)

$$\mathcal{B}_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Dire se f è diagonalizzabile e determinarne tutti gli autovettori.

4. APPLICAZIONI LINEARI E DIAGONALIZZAZIONE: Diagonalizzazione

F 441. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice A.

a. Determinare due autovettori v e w linearmente indipendenti per f.

b. Calcolare $f^{100}(v)$ e $f^{100}(w)$.

c. Scrivere $(1,0)$ come combinazione lineare di v e w e quindi calcolare $f^{100}(1,0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

F 442. Sono date, al variare di $a \in \mathbb{R}$ le applicazioni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f\,(2\,,\,1\,,\,0) & = & (4\,,\,2\,,\,0) \\ f\,(1\,,\,1\,,\,0) & = & (3\,,\,1\,,\,0) \\ f\,(1\,,\,0\,,\,k^2-2k) & = & (2k-3\,,\,k-1\,,\,2-k) \end{array}}$$

a. Dire perché non esiste applicazione lineare f che soddisfi le uguaglianze per $k = 0$.

b. Dire perché esistono infinite applicazioni lineari che soddisfano le uguaglianze per $k = 2$.

c. Dire perché le uguaglianze inquadrate definiscono completamente <u>un'unica</u> applicazione lineare per $k = 1$ e scrivere la matrice associata a f.

d. Sia $k = 1$. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori per f.

C 443. a. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ che soddisfa le tre condizioni.

$$\boxed{f(1,0,0) = (0,1,0) \qquad f(0,1,0) = (0,0,1) \qquad f(0,0,i) = (1,0,0)}$$

b. Scrivere la matrice associata a f

c. Dire perché f è diagonalizzabile, scriverne tutti gli autovalori e almeno un autovettore.

A 444. Scrivere un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che abbia come polinomio caratteristico $P_f(x) = (x-1)(x-3)$ e tale che $f(1,3) = (2,0)$. È f necessariamente diagonalizzabile? È f unica ?

C 445. Calcolare B^{97}, dove $B = \begin{pmatrix} i & 4+4i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

F 451. Chiamata A la matrice 2×2 in ognuno dei tre casi seguenti, dire se A è diagonalizzabile come matrice a elementi reali o a elementi complessi.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

In caso positivo diagonalizzare A, ovvero scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$ e, mediante l'uso di P e D, calcolare A^{99}.

F 452. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come: $f(x,y,z) = (5x+2y-3z\,,\ -y\,,\ 2x+2y)$

a. Scrivere la matrice M associata a f tramite la base canonica e determinare una base per il nucleo e per l'immagine.

b. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori per f.

F 453. a. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa simultaneamente le tre condizioni che seguono

$$\boxed{f(1,1,1) = (0,1,0) \qquad f(0,1,0) = (0,0,0) \qquad f(0,1,1) = (0,2,2)}$$

b. Calcolare la matrice associata a f e dire perché f non è diagonalizzabile.

F 454. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come:

$$\boxed{f(1,0,0) = (1,0,-1) \qquad f(1,1,0) = (3,3,0) \qquad f(1,1,1) = (1,3,2)}$$

a. Dire perché le uguaglianze inquadrate definiscono completamente un'applicazione lineare.

b. Calcolare $f(x,y,z)$ per ogni terna (x,y,z).

c. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori per f.

F 455. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita: $f(x,y,z) = (3x+2y-3z\,,\ 2y\,,\ x+2y-z)$

a. Determinare una base per $\ker(f)$ e una per $\operatorname{Im}(f)$

b. Dire se f è diagonalizzabile e perché.

c. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per f.

d. Scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

F 456. Definire completamente una $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare che soddisfi le tre condizioni sotto.

$$\boxed{f(0,1,1) \;=\; (2,0,4) \qquad (1,0,2) \in \ker(f) \qquad -3 \text{ sia un autovalore}}$$

Dire poi se questa f è diagonalizzabile.

C 457. È data l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice A.

a. Determinare una base per $\ker(f)$

b. Determinare una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

c. Dire quali dei seguenti vettori della base canonica appartengono a $\mathrm{Im}\,(f)$: $\quad v_1 = (1,0,0,0) \quad v_4 = (0,0,0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Dire se nel sottospazio $W = L\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ ci sono autovettori.

e. Dire perché f è diagonalizzabile e scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per f.

f. Scrivere due matrici 4×4: P invertibile e D diagonale, tali che $AP = PD$.

g. Calcolare $f^{2001}(0,0,0,1)$.

C 458. Provare che è diagonalizzabile la matrice A e diagonalizzarla (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

C 459. Dire perché è diagonalizzabile la matrice A a elementi complessi e diagonalizzarla (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

C 460. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare soddisfacente le tre condizioni a lato.

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (-1,k,3) \\ f(0,2,-1) &= (0,0,4) \\ f(0,1,1) &= (0,3,5) \end{aligned}$$

a. Per ogni k scrivere la matrice A associata a f .

b. Dire per quale k l'applicazione f è diagonalizzabile.

C 461. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_3 è fissata una base ortonormale $\mathcal{B} : \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ e ogni vettore è indicato mediante le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ è data l'applicazione $f : V_3 \longrightarrow V_3$ definita come $f(\vec{x}) = \vec{x} \wedge \vec{w}$, dove $\vec{w} = (1,2,-3)$.

a. Provare che è lineare e scrivere una base per $\ker(f)$ e una per $\mathrm{Im}\,(f)$.

b. Scrivere la matrice associata e dire se è diagonalizzabile.

C 462. Scegliere $v, w \in \mathbb{R}^4$ in modo che le quattro condizioni sotto definiscano un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un cui autovalore sia -2 e dire se questa f è diagonalizzabile.

$$\boxed{\begin{matrix} f(1,2,0,0) = (3,6,0,0) & f(0,0,1,1) = (1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) = (1,2,0,0) & f(v) = w \end{matrix}}$$

C 463. Provare che per ogni $n \geq 2$ sono diagonalizzabili le seguenti matrici di $M_{nn}(\mathbb{R})$ e diagonalizzarle (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$).

a. La matrice $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ in cui ogni elemento è 1 ($a_{ij} = 1$ per ogni i, j)

b. La matrice $B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ in cui ogni elemento è 1, tranne la diagonale che è nulla, ($b_{ij} = 1$ per $i \neq j$, $b_{ij} = 0$ per $i = j$), cioè $B = A - I$.

A 464. Sono date le due matrici reali A e B dipendenti da due parametri $a, b \in \mathbb{R}$. Per ogni coppia di $a, b \in \mathbb{R}$ dire se esse sono diagonalizzabili.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

A 465. a. Dimostrare che la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ è sempre diagonalizzabile per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

b. Sia $f : V_2 \to V_2$ associata ad A mediante una base ortonormale $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ di V_2. Determinare tutti gli autovettori di f.

c. Dare un'interpretazione geometrica degli autovettori di f in funzione di θ.

A 466. Sia $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da $f(X) = X \cdot B - B \cdot X$, dove B è la matrice a lato. Provare che f è diagonalizzabile e determinarne una base di autovettori.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. GEOMETRIA ANALITICA: Geometria lineare nel piano

È fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy.

F 501. Scrivere due diverse rappresentazioni parametriche per le seguenti rette:

a. La retta che passa per i punti $A(-1,3)$ e $B(2,1)$

b. La retta di equazione cartesiana $x = 2$

c. La retta di equazione cartesiana $x - 3y = 4$

F 502. Sia r la retta rappresentata parametricamente a lato. $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-2 \end{cases}$

a. Scrivere un'altra rappresentazione parametrica per r tale che il punto A di r di ascissa 0 si ottenga per $t = 0$ e quello B di ordinata 0 per $t = 1$.

b. Dividere il segmento $\overline{AB}$ in due e in tre parti uguali.

F 503. Dire se le rette r_1 e r_2 coincidono e se le rette s_1 e s_2 coincidono

$r_1 \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = t-1 \end{cases}$ $r_2 \begin{cases} x = 3t+4 \\ y = t \end{cases}$ $s_1 \begin{cases} x = t-2 \\ y = t+2 \end{cases}$ $s_2 \begin{cases} x = t+2 \\ y = t-2 \end{cases}$

F 504. Determinare, se possibile, il coefficiente angolare delle seguenti rette:

a. $2x - y = 4$ b. $y + 4 = 0$ e. $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+7}{1}$ f. $\begin{cases} x = 3t \\ y = t-1 \end{cases}$

c. $x - 10 = 0$ d. $x = 3y$

F 505. Verificare che le tre rette $x-2y+3 = 0$; $3x+y+2 = 0$; $x-6y+7 = 0$ appartengono ad un fascio e determinarne il centro.

F 506. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le tre rette $2kx - ky = 1$; $2x = ky$; $-2kx + y = 1$ appartengono ad un fascio ?

F 507. Nella famiglia di rette $x + 3ky - 5k + 2 = 0$ determinare (se esistono)

a. La retta un cui vettore direzionale sia $(2,1)$.

b. La retta parallela all'asse x e quella parallela all'asse y.

c. Il punto comune a tutte le rette.

C d. Le rette s tali che il triangolo determinato da s e dai due assi coordinati abbia area 7.

F 508. Determinare due punti P della retta $x - y + 2 = 0$ tali che il triangolo POA sia rettangolo in P, dove O è l'origine delle coordinate e $A = (10,0)$.

F 509. Scrivere la retta r rispetto alla quale siano simmetrici $A(0,4)$ e $B(1,-2)$.

F 510. a. Determinare il punto simmetrico di $P(1,1)$ rispetto alla retta $r:\ x - 2y = 1$.

b. Determinare la retta simmetrica di $s:\ x + y = 2$ rispetto alla retta $r:\ x - 2y = 1$.

F 511. Scrivere un'equazione cartesiana che sia soddisfatta da tutti e soli i punti dell'insieme costituito dall'unione delle rette $x = y$; $x = 3y$; $x = 1$.

C 512. Determinare le rette passanti per $P(0,1)$ e formanti con la retta $y = 2x$ un angolo di $\pi/6$..

C 513. Determinare le due bisettrici degli angoli formati dalle rette $2x - y = 0$ e $x + y = 1$ e dire quale di esse è situata nell'angolo minore.

A 514. Tra i punti P della retta $r : 4x - 3y + 2 = 0$ determinare quello il cui simmetrico rispetto alla retta $s : x - 2y = 2$ ha distanza minima da $(0,0)$.

A 515. Date le due rette $r : x + 2y = 2$ $s : \{x = 2 - t\ ;\ y = 3 + 2t\}$ e il loro punto comune P, determinare i punti di r la cui proiezione ortogonale su s dista 5 da P.

A 516. Dati i tre punti $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(6,0)$, determinare un quarto punto D in modo che i quattro punti formino un parallelogramma. In quanti modi è possibile ?

T 517. Determinare il baricentro del triangolo $A(a_1,a_2)$ $B(b_1,b_2)$ $C(c_1,c_2)$

5. GEOMETRIA ANALITICA: Circonferenze nel piano

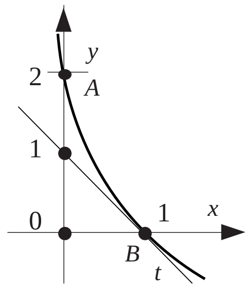
F 521. Scrivere le equazioni delle circonferenze di raggio $\sqrt{5}$, passanti per il punto $(0,0)$ e ivi tangenti alla retta $r:\ 2x = 3y$.

F 522. Scrivere l'equazione delle circonferenze di raggio 1 aventi il centro sull'asse x e tangenti alla retta $y = 2x$.

F 523. Scrivere le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $A(-2,2)$ e $B(2,0)$ e tangenti alla retta $r:\ x + y + 2 = 0$.

F 524. Scrivere le equazioni delle rette passanti per $(1,2)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x + 8y = 0$.

F 525. Scrivere l'equazione della circonferenza γ di cui è raffigurato un arco. Sono evidenti due suoi punti A e B e la retta t tangente a γ in B.



F 526. Tra le rette del fascio di centro $(4,-1)$ determinare quelle che tagliano la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4x$ in una corda di lunghezza 2.

A 527. Tra le circonferenze tangenti alle rette parallele $y = 2x+1$ e $y = 2x+3$ determinare le due che sono tangenti anche alla retta $s : 3x = y$.

A 528. Scrivere le equazioni delle circonferenze con centro sull'asse y e tangenti a $x + y + 1 = 0$ e a $2x - y = 4$.

C 529. Scrivere l'equazione di una circonferenza di raggio 3 con centro sulla retta $r : y = 3x + 2$ e che sia tagliata dalla retta $s : x + y = 2$ in una corda di lunghezza 2.

A 530. Che raggio deve avere una circonferenza di centro $(3,0)$ affinché una delle rette ad essa tangenti in una delle sue intersezioni con $y = 2x$ intercetti l'asse x nel punto $(-3,0)$?

A 531. Siano $r : 2x = y$; $s : 3x + y = 0$ due rette; determinare tra le due bisettrici degli angoli di r e s quella situata nell'angolo minore. Determinare quindi le circonferenze di raggio 2 situate negli angoli minori tra r e s e tangenti sia a r che a s.

C 532. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ e $\gamma_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = R^2$.

a. Discutere al variare di $R \in \mathbb{R}$ la reciproca posizione.

b. Nei casi in cui sono tangenti determinare la comune retta tangente.

c. Per $R = 3$ scrivere la retta passante per i punti di intersezione.

A 533. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ e $\gamma_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$, determinare le equazioni delle quattro rette tangenti a entrambe.

5. GEOMETRIA ANALITICA: Geometria lineare nello spazio

È fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorso Oxyz.

F 541. Sono dati il punto $P = (0,1,2)$ e il piano $\alpha : x - 3y + z = 0$. Determinare:

a. il piano passante per P e parallelo al piano α .

b. due piani passanti per P e ortogonali al piano α.

c. la retta passante per P e ortogonale al piano α .

d. la proiezione ortogonale di P sul piano α.

F 542. Sono dati la retta r e il punto $P = (0,1,2)$. Determinare:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

a. la retta passante per P e parallela a r.

b. due rette passanti per P e ortogonali a r.

c. il piano passante per P e ortogonale a r.

d. la proiezione ortogonale di P sulla retta r.

e. la distanza di P da r.

f. la retta passante per P e perpendicolare (e incidente) a r.

F 543. È data per ogni $k \in \mathbb{R}$ la retta r di rappresentazione cartesiana $\{x + y = k \quad ; \quad z + k^2 y = 1\}$.

a. Scrivere per ogni $k \in \mathbb{R}$ una rappresentazione parametrica per r.

b. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ qual è la posizione reciproca della retta e del piano $\alpha:\ x+2y+z=0$.

F 544. Dati i tre punti $A(0,1,0)$ $B(2,1,1)$ $C(0,-1,2)$, dimostrare che non sono allineati e determinare il piano che li contiene.

F 545. Determinare il piano che contiene il punto $P(1,0,3)$ e la retta $r:\ x=y=2-z$.

F 546. Dire per quale $k \in \mathbb{R}$ le rette r e s sono incidenti e per tale k determinare il piano che le contiene.
$$r: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-t \\ z = 3-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = k-2t \\ z = 2-t \end{cases}$$

F 547. Sono dati i tre piani α, β, γ al variare di $k \in \mathbb{R}$

a. Determinarne la posizione reciproca per ogni $k \in \mathbb{R}$.

b. Nei casi in cui i tre piani formano un fascio determinare la direzione dell'asse

$$\begin{aligned} \alpha:&\quad x+k^2y+z = -4 \\ \beta:&\quad 2x+2y+(k+1)z = 0 \\ \gamma:&\quad (2-2k^2)y+(4k+3)z = k^2+3 \end{aligned}$$

F 548. Dati il punto $P(1,0,1)$, la retta $r: x-2y=z=0$ e il piano $\alpha: x-3y=z$.

a. Trovare la proiezione ortogonale di P su r e la proiezione ortogonale di P su α.

b. Trovare la proiezione ortogonale di r su α.

F 549. Determinare la retta s giacente sul piano $\alpha:\ x+2y+z=1$ perpendicolare e incidente la retta $r: \{x=y=z\}$

F 550. Data la retta $r:\ \{x=2t \quad ; \quad y=t \quad ; \quad z=-1+3t\}$

a. Scrivere la retta s passante per $P(0,1,0)$ e parallela a r e determinare la distanza tra r e s.

C b. Tra i piani passanti per P e paralleli a r determinare quello che ha distanza massima da r.

F 551. Dati i punti $A(2,1,0)$, $B(1,0,3)$, $C(0,1,1)$:

a. Determinare l'area del parallelogramma di lati AB e AC.

b. Determinare il punto S dello spazio tale che $ABSC$ sia un parallelogramma.

c. Trovare i punti D dell'asse x per cui il volume del parallelepipedo di lati AB, AC, AD è 3.

F 552. Date le rette $r: \{x=y \quad ; \quad z=2\}$ e $s: \{x=3y-2 \quad ; \quad z+y=0\}$

a. Dimostrare che sono sghembe.

b. Scrivere tutte le rette incidenti sia r che s.

c. Tra esse determinare quella ortogonale a entrambe.

d. Tra esse determinare quella parallela alla retta $x=y=z$.

e. Calcolare la distanza d tra r e s.

F 553. Determinare sul piano $\alpha:\ x-2y+z=0$ che contiene il punto $P(1,0,-1)$:

a. la retta r_1 passante per P e ortogonale all'asse x.

b. la retta r_2 passante per P e parallela al piano $\beta:\ 3x=z$.

c. la retta r_3 passante per P e incidente la retta $s:\ x-3y=z-2=0$.

F 554. Tra le rette perpendicolari e incidenti alla retta r nel suo punto $P(0,0,2)$ determinare:

a. quella incidente la retta $s: \{x=y=z\}$

b. quella ortogonale a s.

A c. quelle che hanno distanza 1 da s.

$$r: \begin{cases} x-y=0 \\ z=3y+2 \end{cases}$$

C 555. Determinare il punto della retta $r:\ x=y=z-1$ la cui proiezione ortogonale sulla retta $s:\ x-2y=z+x=0$ sia l'origine delle coordinate.

C 556. Tra le rette uscenti da $P(1,2,-1)$ e parallele al piano $\alpha:\ x+3y-z=1$ determinare quella incidente la retta $r: \{x=3y \quad ; \quad z=x+1\}$.

C 557. Date le rette r e s

a. Dimostrare che r e s sono sghembe.

b. Determinare la loro distanza d.

$$r: \begin{cases} x-z=1 \\ y=1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x-y+3=0 \\ x-2z+5=0 \end{cases}$$

c. Determinare la perpendicolare comune e i punti P_r, P_s di minima distanza.

d. Determinare il piano parallelo a entrambe e da esse equidistante.

A e. Determinare i piani α contenenti r tali che la proiezione di P_s su α abbia distanza 1 da P_s.

A f. Determinare i punti di r che distano $2d$ da s.

C 558. Consideriamo tutte le rette s giacenti sul piano $\alpha:\ x+y=2$ e incidenti la retta r. Per ognuna di esse sia θ l'angolo che s forma con r (quello compreso tra 0 e $\pi/2$). Determinare tra le rette s quelle tali che: $r:\begin{cases} x=y+2 \\ z=2x \end{cases}$

a. θ sia massimo. b. θ sia minimo. c. $\theta=\pi/3$

559. Dati il punto $P(1,0,2)$, la retta $r:\{x=2y=z+1\}$ e il piano $\alpha:3x-2y+z=0$.

F a. Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r.

F b. Determinare il punto P'' simmetrico di P rispetto ad α.

F c. Determinare il punto O' simmetrico di O rispetto a P.

C d. Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto a P.

F e. Determinare la retta r'' simmetrica di r rispetto ad α.

C f. Determinare la retta x' simmetrica dell'asse x risp. a r.

C g. Determinare il piano α' simmetrico di α rispetto a P.

A h. Determinare il piano α'' simmetrico di α rispetto a r.

A i. Determinare il piano β simmetrico di $z=0$ rispetto ad α.

C 560. Determinare i simmetrici del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$, della retta $r:\{x=x(t)\,;\ y=y(t)\,;\ z=z(t)\}$ e del piano $\alpha:ax+by+cz=d$ rispetto al punto $(0,0,0)$, alla retta $x=y=0$ e al piano $z=0$.

A 561. Determinare i piani passanti per il punto $P(0,2,0)$, paralleli alla retta $r:\{x-y=z\ ;\ y=2x\}$ e aventi distanza 1 da r.

A 562. Determinare (se esiste) la retta passante per $P(1,1,1)$ e incidente le due rette r e s nei due casi seguenti.

a. $r:\{x=2y-1=-z\}$ $s:\{x=2\ ;\ y=3z\}$ b. $r:\{x=-y-1=-z\}$ $s:\{x=\ ;\ y=3z\}$

5. GEOMETRIA ANALITICA: Sfere e circonferenze nello spazio

F 571. Sono dati la sfera S di equazione $x^2+y^2+z^2+4y-3z=0$ e il piano α di equazione $x+2y+z=2$.

a. Determinare centro e raggio di S.

b. Dire perché l'intersezione tra S e α è una circonferenza e determinarne centro, raggio e asse.

c. Determinare i piani paralleli al piano α e tangenti a S.

d. Determinare i piani paralleli al piano α che tagliano S in una circonferenza di raggio $1/2$.

e. Determinare i due punti P_1 e P_2 di intersezione di S con la retta $\{x=t\ ;\ y=t\ ;\ z=t\}$ e scrivere i piani tangenti a S in P_1 e P_2.

f. Per ogni $k\in\mathbb{R}$ dire se la retta $\{x=t+1\ ;\ y=k\,t\ ;\ z=3\}$ è incidente, tangente o esterna a S.

F 572. Sono dati la retta $r:\{z=x-3\ ;\ y=1\}$ e il punto $P(0,2,1)$.

a. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ ottenuta ruotando P attorno a r, in altre parole la circonferenza avente asse r e passante per P.

b. Determinare la retta t tangente a γ in P.

c. Determinare le sfere di raggio 9 contenenti γ.

d. Determinare le sfere contenenti γ e tangenti al piano $\alpha:x=5$.

F 573. Sono dati i quattro punti $C_0(0,1,1)$ $A(2,0,0)$ $B(1,3,2)$ $C(1,-1,0)$

a. Dire perché esiste una sfera S di centro C_0 e passante per A,B,C e scrivere una rappresentazione cartesiana per S.

b. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ giacente su S e passante per A,B,C.

c. Scrivere l'asse a, il centro C_1 e il raggio R_1 di γ.

d. Scrivere una rappresentazione parametrica per la retta tangente a γ in A.

F 574. a. Scrivere l'equazione di tutte le sfere tangenti in $(1,1,0)$ al piano $x=y$.

b. Tra tali sfere determinare quelle di raggio $\sqrt{2}$.

c. Tra tali sfere determinare quelle tangenti anche al piano $x+z=3$.

F 575. Data la sfera S di equazione $4x^2+4y^2+4z^2-4x+8z+1=0$ e la retta $r:\{x-y=0 \quad ; \quad z=0\}$, verificare che r è esterna a S e scrivere i piani del fascio di asse r tangenti a S.

F 576. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza di centro $C\,(0,1,2)$ e tangente alla retta $r:\ \{x=1+2t \quad ; \quad y=1+t \quad ; \quad z=-t\}$.

F 577. Date le due rette $r:\{x-z=1 \quad ; \quad y+2z=1\}$ e $s:\{x=t \quad ; \quad y=2 \quad ; \quad z=3-t\}$

a. Dimostrare che sono ortogonali e sghembe e determinarne la distanza.

b. Dire perché esiste una circonferenza di asse r e tangente a s e scriverne una rappresentazione cartesiana.

F 578. Determinare una sfera di raggio 2, con centro sulla retta $r:\ x=y=z-1$ e tangente al piano $\alpha:\ x=3y$.

F 579. Dato il triangolo $\mathcal{T}: ABC$, con $A(1,0,2)$, $B(2,1,0)$, $C(0,-1,1)$

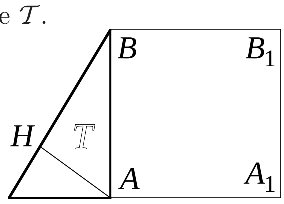
a. Dire perché il triangolo $\mathcal{T}$ è rettangolo in A.

b. Determinare il punto H, proiezione di A sull'ipotenusa e misurare l'altezza $\overline{AH}$.

c. Scrivere una rappresentazione cartesiana per il piano α su cui giace $\mathcal{T}$.

d. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza circoscritta a $\mathcal{T}$.

e. Nel piano di $\mathcal{T}$, costruire il quadrato AA_1B_1B sul cateto AB determinando il punto A_1 sul prolungamento del cateto AC e il quarto punto B_1 come in figura.



C 580. Dati i tre punti $A(0,1,1)$, $B(1,1,0)$ e $C(1,-1,1)$, verificare che non sono allineati e determinare la circonferenza passante per A,B,C.

C 581. Determinare le sfere di raggio 1, con centro sul piano $x=y-z$, tangenti ai piani $x=0$ e $y+z=1$.

A 582. Sia γ la circonferenza del piano $x=3y-1$ avente centro $(-1,0,0)$ e raggio 1.

a. Scrivere le due sfere contenenti γ e tangenti al piano $x=0$.

b. Scrivere le rette tangenti alla circonferenza nei suoi punti di ascissa $-1/7$.

c. Condurre dal punto $P(2,1,1)$ (che giace sul piano $x=3y-1$) le tangenti alla circonferenza.

A 583. Data la sfera $S:\ x^2+y^2+z^2-2z=0$

a. Tra le rette passanti per $(0,0,0)$ e parallele al piano $x=z+1$, determinare quelle che staccano su S una corda di lunghezza 1.

b. Determinare il cerchio massimo di S passante per $P(0,0,0)$ e per $Q(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,1)$.

c. Determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{3}/2$ giacenti su S e passanti per P e Q.

d. Verificato che la retta $r:\ \{z=2 \quad ; \quad y=3x\}$ è tangente a S, determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{3}/2$ giacenti su S e tangenti a r.

A 584. Tra le rette tangenti alla sfera di centro $(1,1,2)$ e raggio 2 nel suo punto di minima distanza da $(0,0,0)$ determinare :

a. quella ortogonale all'asse y.

b. quella incidente l'asse y.

A 585. Verificare che i punti $A(1,0,0), B(0,1,1)$ e la retta $r:\{x+z=1 \quad ; \quad y=2\}$ sono complanari e determinare le circonferenze passanti per A e B e tangenti a r.

A 586. Determinare i punti P della retta $r\{x=t \quad ; \quad y=2t+1 \quad ; \quad z=1-t\}$ tali che la sfera di centro P e tangente al piano $x+y+z=0$ abbia raggio $\sqrt{3}$.